А. Н. Васильев

Классическая электродинамика

Краткий курс лекций

А. Н. Васильев

Классическая электродинамика

Краткий курс лекций

Допущено Научно-методическим советом по физике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов университетов и технических вузов

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2
В19

Васильев А. Н.

В19 Классическая электродинамика. Краткий курс лекций: учеб. пособие. — 2-е изд., стереотипное. — СПб.: БХВ-Петербург, 2010. — 288 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-0343-3

Книга представляет собой курс лекций по классической электродинамике, который читался автором на протяжении многих лет в бакалавриате физического факультета Санкт-Петербургского (Ленинградского) государственного университета. Основу курса составляют фундаментальные принципы, такие как уравнения Максвелла и принцип относительности, объединенные в релятивистской ковариантной форме уравнений электродинамики. На их базе последовательно излагаются основные идеи и методы электростатики, теории излучения, электродинамики сплошных сред и теории волноводов. Материал представлен с высокой степенью математической строгости, которая органично соединяется с ясным изложением физического содержания. Книга может быть полезна всем, кто, имея элементарные знания в области электрических явлений и математического анализа, хотел бы получить ясное и математически строгое представление, как о теоретических основах, так и о методах решения самых сложных задач электродинамики.

Для студентов университетов и технических вузов

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Евгений Рыбаков*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн серии	*Инны Тачиной*
Оформление обложки	*Елены Беляевой*
Фото	*Кирилла Сергеева*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 30.10.09.
Формат 70×100 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,22.
Тираж 1500 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.60.953.Д.005770.05.09 от 26.05.2009 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-9775-0343-3

Оглавление

Об авторе

Александр Николаевич Васильев (1.09.1940–10.10.2006) — профессор физического факультета Санкт-Петербургского (Ленинградского) государственного университета — принадлежал к поколению преподавателей университета, которое сформировалось, когда во всем мире уделялось большое внимание развитию точных наук, и не утратило характерный для тех лет исследовательский и педагогический энтузиазм.

А. Н. Васильев родился в 1940 г. в Пскове. Там же он окончил с золотой медалью среднюю школу. После этого поступил на физический факультет ЛГУ, с которым с тех пор оказалась связана вся его дальнейшая жизнь.

До конца своих дней Александр Николаевич уделял много времени непосредственному общению со студентами, так же как это было и в 1960-е годы, когда он, молодой сотрудник кафедры теории поля, только начинал свою преподавательскую деятельность. Он читал важнейшие курсы лекций по теоретической физике — те курсы, на которых у будущих исследователей формируются основы физической картины мира, — и делал это с большим педагогическим мастерством. На его лекциях, даже когда они проходили в самых больших аудиториях, часто было непросто найти свободное место — он пользовался огромным авторитетом у студентов. На многократно проводившихся опросах они называли его одним из лучших преподавателей физического факультета, а Ученый совет СПбГУ наградил его почетной премией “За педагогическое мастерство”. Лекции Александра Николаевича всегда отличались простотой и ясностью изложения самых сложных концепций. В этом проявлялся особый стиль его мышления, который способствовал формированию столь необходимого для физика-исследователя навыка видеть простую суть в сложном явлении. Годы работы А. Н. Васильева в университете характеризовались небывалыми темпами развития теоретической физики, требовалось постоянное совершенствование курсов лекций, чтобы в доступной для студентов форме рассказать о новейших достижениях в данной области. Александр Николаевич всегда успешно справлялся с этой весьма непростой задачей.

Как минимум половина из выпускников физического факультета за последние 40 лет общались с А. Н. Васильевым как с преподавателем, слушали его лекции, сдавали ему экзамены или зачеты. Для многих из них это дало возможность не только приобрести глубокие профессиональные знания, но и приобщиться к лучшим традициям Ленинградского — Санкт-Петербургского университета.

Замечательный педагог, Александр Николаевич, обладал уникальным талантом ученого. Его научные исследования были таким же важным делом в его жизни, как и преподавание, и они были неразрывно связаны между собой. Научные интересы Александра Николаевича были необычайно широки и разнообразны. Уже в самом начале научной карьеры он добился успеха в сложной области теоретической физики — конструктивной квантовой теории поля. Полученные им результаты были отмечены в 1972 г. премией Ленинского комсомола. В то время это была самая престижная государственная премия для молодых исследователей, которая присуждалась за наиболее важные научные достижения.

А. Н. Васильев пользовался заслуженным международным признанием как специалист по конструктивной теории поля, когда он решил не ограничиваться этой проблематикой и расширить область своих исследований. Вместе со своими учениками он занялся разработкой функциональных методов квантовой теории поля и статистической физики. Так возникла “Школа Васильева”, в которой формировались высококвалифицированные научные работники и преподаватели. В настоящее время среди учеников Александра Николаевича 9 докторов и свыше 20 кандидатов наук, которые успешно развивают идеи своего учителя. Многие из них уже создали собственные научные направления и имеют своих учеников. Результаты, полученные А. Н. Васильевым и его учениками, дали возможность выявить глубокое внутреннее единство классических и квантовых сложных систем с большим числом степеней свободы. Они позволяют, в частности, применять общий математический формализм для теоретического исследования физических явлений, имеющих совершенно разную природу.

Наибольший интерес у Александра Николаевича в последние годы проявлялся к теории критических явлений. Это одна из самых молодых и бурно развивающихся областей теоретической физики, в становление которой он, его ученики и коллеги внесли весьма существенный вклад.

В 1990-е годы А. Н. Васильев неоднократно становился лауреатом грантов Сороса и опубликовал несколько научно-популярных статей в “Соросовском образовательном журнале”.

Богатый научно-педагогический опыт, накопленный А. Н. Васильевым за многие годы, нашел свое отражение в книгах: “Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике” (издательство Ленинградского университета, 1976; перевод на английский язык: Vasil’ev A. N. Functional methods in quantum field theory and statistics. London: Gordon & Breach, 1998), “Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике” (издательство Петербургского института ядерной физики, 1998; перевод на английский язык: Vasil’ev A. N. The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004).

О книге

Данная книга профессора А. Н. Васильева посвящена разделу физики, давно уже ставшему классическим, — электродинамике. Наряду с классической и квантовой механикой электродинамика является неотъемлемой частью образования современных физиков и инженеров, а ее глубокое понимание необходимо для успешного усвоения более специальных дисциплин, таких как физика плазмы, радиофизика, магнитная гидродинамика, физика и техника ускорителей, квантовая теория поля и многих других. По этому предмету опубликован целый ряд учебников (наиболее известные из них — “Классическая электродинамика” Дж. Джексона и “Теория поля” Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица), но книга А. Н. Васильева обладает рядом особенностей, делающих ее уникальной, и она несомненно займет свое особое место среди других монографий.

По существу, данная книга — полный и подробный конспект лекций, читавшихся автором на протяжении трех десятилетий для студентов третьего курса физического факультета ЛГУ (СПбГУ) в качестве части курса теоретической физики. Это в значительной степени определяет объем, структуру и стиль изложения, а также уровень требований, предъявляемых к читателю. Книга рассчитана на тех, кто имеет предварительные знания в области электричества и магнетизма, а также математического анализа (в пределах первых двух курсов физического или инженерно-технического вуза), но хотел бы получить более полное и систематическое представление как о теоретических основах, так и о математических методах классической электродинамики.

Особенностью книги является принятый в ней аксиоматический подход: сначала постулируются основные уравнения электродинамики (уравнения Максвелла в дифференциальной форме), а затем основные результаты выводятся из них как следствия (при минимальных дополнительных предположениях, которые всегда четко формулируются). Такое представление материала является наиболее последовательным и экономичным, так как оно позволяет быстро подвести читателя к постановке более сложных проблем, выходящих уже за рамки краткого курса, и дать методы их решения. В то же время, аксиоматический подход с самого начала подчеркивает единую природу электрических и магнитных явлений, которые в курсах общей физики, как правило, изучаются раздельно. Так как книга задумана как часть курса теоретической физики, основное внимание в ней уделяется принципиальным проблемам электродинамики, хотя текст содержит также ряд важных приложений общей теории.

Книгу можно разделить на четыре основные части.

В первой, вводной, части формулируются основные уравнения электродинамики, обсуждается соотношение между их дифференциальной и интегральной формами, строятся потенциалы электромагнитного поля, изучаются калибровочные преобразования и соответствующие им дополнительные условия, выводятся фундаментальные следствия типа закона сохранения электрического заряда.

Вторая часть посвящена релятивистски-ковариантной формулировке электродинамики на языке преобразований Лоренца. Основная идея автора здесь — показать, как просто и естественно представляются основные соотношения электродинамики в релятивистской форме. Это важно как для физиков-экспериментаторов, для которых изучение электродинамики дает уникальную возможность познакомиться с общими принципами теории относительности и ее конкретными приложениями, так и для теоретиков, для которых электродинамика может служить прообразом современных калибровочных теорий поля, описывающих фундаментальные взаимодействия элементарных частиц.

Третья часть посвящена в основном электро- и магнитостатике. Решение соответствующих задач приведено в явном виде. При этом вводятся важные понятия (например, мультипольное разложение и мультипольные моменты), которые впоследствии существенно используются при обсуждении задач динамики.

Четвертая часть посвящена собственно динамике. Она включает обсуждение таких проблем, как общее решение волнового уравнения, излучение произвольно движущихся зарядов, излучение локализованных источников (общие выражения, дипольное и квадрупольное приближения, теория антенн). Заключительная часть содержит краткое, но ясное и информативное введение в теорию распространения электромагнитных волн в волноводах. Физик-экспериментатор и инженер найдут здесь для себя много интересных приложений общей теории.

Важной чертой книги является замкнутость изложения: необходимые сведения из математики и других разделов физики кратко излагаются в нужных местах. Это, например, элементы векторного анализа, аппарат тензоров на группе вращений, определение и свойства дельта-функции Дирака, элементы теоретической механики (гамильтониан, лагранжиан и принцип наименьшего действия).

Александр Николаевич Васильев — выдающийся физик-теоретик и уникальный педагог, неоднократно признававшийся студентами лучшим лектором физического факультета ЛГУ (СПбГУ), работал над данной книгой много лет и закончил ее незадолго до своей скоропостижной кончины в октябре 2006 г. Поэтому книга, сохраняющая неповторимый авторский стиль, свойственный его лекциям, в то же время представляет предмет в наиболее полном и завершенном виде.

Публикация книги позволит ознакомиться с классической электродинамикой в прекрасном изложении автора максимально широкому кругу читателей — не только студентам и аспирантам, но и профессионально работающим физикам и инженерам.

Директор отделения теоретической физики
Петербургского института ядерной физики
член-корреспондент РАН Л. Н. Липатов

Предисловие

Этот текст является фактически просто полным конспектом курса лекций по классической электродинамике, читаемых автором на физическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета. Лекции читаются для всех студентов третьего курса в течение одного (осеннего) семестра по “две пары”, т. е. четыре академических часа в неделю. Этим определяется объем материала и его отбор: задача курса — дать общее представление об основных принципах теории на таком уровне и в таком объеме, которые могли бы позволить усвоившему этот материал читателю в дальнейшем разбираться самостоятельно с различными конкретными задачами.

По объему предлагаемый материал соответствует курсу, который действительно можно прочитать (и читается автором) за один семестр, конечно, с небольшими вариациями, зависящими от скорости чтения и от числа теряемых на праздники, коллоквиумы и т. п. лекций. В некоторые годы я успевал прочитать последний раздел “Волноводы”, в иные — не успевал.

Второй важный момент — контингент слушателей. В предисловии классической книги Джексона [1] говорится, что это “двухсеместровый курс для аспирантов”. В отличие от этого, данный курс лекций предназначен для более молодых и менее подготовленных слушателей — студентов третьего года обучения физического факультета (это их пятый семестр), причем для всех, а не только для будущих аспирантов. Конечно, это влияет как на отбор материала, так и на стиль его изложения.

В этих лекциях принят “аксиоматический подход”: сначала в качестве постулатов формулируются дифференциальные уравнения Максвелла для полей в вакууме, все прочее выводится затем из них как следствия, что и определяет порядок изложения. Например, в рамках логики данного курса вывести элементарную формулу $\vec{F} = Q\vec{E}$ для действующей на заряд Q в поле $\vec{E}$ силы $\vec{F}$ можно лишь после довольно большой предварительной подготовки, хотя обычно эта формула приводится сразу же как определение напряженности электрического поля $\vec{E}$. По тем же причинам вывод нестационарных уравнений Максвелла в среде (диэлектрики и магнетики) приводится лишь в конце курса после анализа мультипольных разложений для динамических полей в вакууме, — такой порядок однозначно определяется внутренней логикой данного курса.

Сознательно ограничивая тематику, я стремился сделать изложение основных положений максимально ясным и доступным для всех желающих, допуская при этом, что не все слушатели хорошо помнят уже пройденный ими ранее на других курсах материал. Поэтому в тексте всегда приводятся все нужные для его понимания справочные сведения, в частности, основные определения и формулы векторного анализа. В тех разделах, в которых электродинамика соприкасается с теоретической механикой или с термодинамикой, в качестве введения приводится краткая сводка нужных для дальнейшего основных положений этих смежных дисциплин. Все это важно и для согласования обозначений, которым я уделял особое внимание, стремясь сделать их как можно более ясными и компактными. Я придерживаюсь той точки зрения, что "удачные обозначения — половина дела".

Курс разбит на четыре главы (см. "Оглавление"). Относительно большая по объему, вторая глава посвящена релятивистски-ковариантной формулировке электродинамики на языке специальной теории относительности. Математическим аппаратом этой теории является язык тензоров на группе Лоренца. Поскольку его нельзя считать общеизвестным для третьекурсников, все нужные определения и сведения приводятся в тексте, что составляет довольно большое "математическое отступление". Общая цель этой главы состоит в том, чтобы показать, как просто и красиво формулируются основные соотношения электродинамики на таком языке. Это особенно важно для будущих физиков — экспериментаторов, для которых курс электродинамики предоставляет уникальную возможность достаточно подробно ознакомиться с общими принципами теории относительности и их конкретными приложениями.

В заключение поясним порядок ссылок в тексте. Каждая из его четырех частей состоит из нумерованных разделов ("пунктов"), ссылка типа "п. 2.3" обозначает раздел 3 главы 2, и т. п. Нумерация формул по всему тексту сплошная, поэтому при ссылках указывается только номер формулы без уточнения номеров главы и раздела. Всюду используется гауссова система единиц.

Глава 1

Общее введение

1.1 Уравнения Максвелла

Классическая электродинамика представляет собой один из разделов теоретической физики, который в настоящее время можно считать полностью завершенным. Поэтому ее можно излагать аксиоматически, постулировав без вывода основные уравнения и выводя из них все остальное как следствия. Именно так и будет строиться изложение в данном курсе лекций.

Мы принимаем в качестве постулата следующие четыре уравнения Максвелла (1865 г.) — это дифференциальные уравнения в частных производных, связывающие напряженности электрического E и магнитного H полей с "источниками" — объемными плотностями заряда ρ и тока j:

$$\operatorname{div} H = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} E + \frac{1}{c}\partial_t H = 0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho, \tag{3}$$

$$\operatorname{rot} H - \frac{1}{c}\partial_t E = \frac{4\pi}{c} j. \tag{4}$$

Это уравнения для электромагнитного поля в вакууме, записанные в так называемой "гауссовой системе единиц", наиболее удобной для записи общих соотношений, — она и будет использоваться всюду в этом курсе. Константа "c" в уравнениях — скорость света в вакууме (триста тысяч километров в секунду), $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ — частная производная по времени t, определения координатных дифференциальных операций “div” и “rot” напоминаются ниже. Обычная постановка задачи такова: источники ρ и j даны, напряженности E и H ищутся.

О терминологии: уравнение (3) есть дифференциальная форма закона Кулона, (1) — его магнитный аналог, (2) — дифференциальная форма закона электромагнитной индукции Фарадея, уравнение (4) без второго вклада в левой части — закон Ампера.

Историческая справка: формально единственным вкладом Максвелла в уравнения электродинамики была добавка второго слагаемого в левую часть уравнения (4). После переноса в правую часть она выглядит как добавка к плотности тока и ее называют “током смещения Максвелла”. Эта добавка играет очень важную роль: она позволила Максвеллу истолковать систему (1)–(4) как уравнения распространения упругих колебаний (т. е. уже хорошо знакомый физикам того времени процесс) некоторой абстрактной сплошной среды, названной им “эфиром”. Впоследствии теория относительности (которая будет подробно обсуждаться в дальнейшем) позволила избавиться от понятия эфира.

О размерностях: исходя из общего принципа, согласно которому все слагаемые в каждом выражении и обе части равенства в любом уравнении должны иметь одинаковую размерность, можно выразить размерности всех входящих в уравнения (1)–(4) величин через размерности фундаментальных величин — заряда (Q), длины (L) и времени (T), отправляясь от известной размерности объемной плотности заряда $\rho \propto Q/L^3$ (заряд/объем) и скорости света $c \propto L/T$ (длина/время). Приравнивая размерности вкладов в уравнениях (2)–(4) с учетом $\mathrm{div} \propto \mathrm{rot} \propto 1/L$ для этих операций (см. ниже) и $\partial_t \propto 1/T$, получим $E/L \propto (T/L)(H/T)$ из (2), $(E/L) \propto \rho \propto Q/L^3$ из (3) и $H/L \propto (T/L)(E/T) \propto j(T/L)$ из (4). Отсюда следует, что по размерности

$$E \propto H \propto Q/L^2, \quad \rho \propto Q/L^3, \quad j \propto Q/TL^2. \tag{5}$$

Таковы размерности всех величин в гауссовой системе единиц, в которой записаны уравнения. Из (5) следует, что в этой системе размерности напряженностей E и H одинаковы.

Нужно также отметить, что традиционный термин “объемная плотность тока” не вполне корректен и может вести к недоразумениям. Обычно под объемной плотностью некоторой величины понимается “количество данной величины в единице объема”, такой смысл имеет, в частности, объемная плотность заряда ρ. Но под “величиной тока” естественно понимать то, что измеряется поставленным в проводе амперметром, — количество заряда, проходящее через сечение провода за единицу времени, т. е. то, что измеряется в амперах. Такой смысл имеет произведение j не на объем (как следовало бы из формального смысла термина), а на площадь: по смыслу j есть вектор, направление которого показывает направление “размазанного” по объему тока, а его абсолютная величина есть количество заряда, проходящего за единицу времени через поставленную поперечно направлению тока площадку единичного сечения.

1.2 Математическое отступление: соглашения об обозначениях, справочные формулы

Тройку координат трехмерного пространства мы будем в дальнейшем обозначать одной буквой, например, x, понимая x как трехмерный вектор с компонентами x_i, $i = 1, 2, 3$. Это значит, что для нумерации осей трехмерного пространства принимаются цифровые обозначения 1, 2, 3, а не буквенные x, y, z, которые часто используются в школьных курсах, но очень неудобны при записи сложных выражений, с которыми нам придется иметь дело в дальнейшем.

Соглашение: частные производные по пространственным координатам x_i будем обозначать сокращенно через ∂_i, т. е. $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$.

Соглашение: для индексов, нумерующих пространственные координаты, всегда будут использоваться латинские буквы типа $i, k, l, \ldots$ Каждый из таких индексов может принимать любое из цифровых значений 1, 2, 3, поэтому объект, содержащий n латинских индексов, имеет 3^n компонент, получаемых присвоением каждому из индексов конкретного цифрового значения 1, 2 или 3. Например, величина типа A_{ik} имеет 9 компонент, величина типа A_{ikl} — 27 компонент, и так далее.

Определение тензоров δ_{ik} и ε_{ikl}. В формулах будут часто встречаться два фундаментальных тензора (точный смысл термина “тензор” пояснится впоследствии), а именно, *символ Кронекера* δ_{ik}, компоненты которого равны единице при $i = k$ и нулю при $i \neq k$, т. е.

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases}$$

и трехзначковый символ ε_{ikl}, компоненты которого определяются следующими двумя требованиями:

1) ε_{ikl} полностью антисимметричен, т. е. его компоненты меняют знак при перестановке любых двух соседних индексов;

2) компонента ε_{123} равна единице.

Покажем, что эти два требования определяют ε_{ikl} однозначно. Трехзначковый объект ε_{ikl} имеет $3^3 = 27$ компонент (см. выше), но большинство из них равны нулю вследствие требуемой антисимметрии. Действительно, если какая-нибудь конкретная компонента имеет два одинаковых цифровых индекса, то она должна быть равной нулю. [Пример: компонента ε_{112}, с одной стороны, не изменяется при перестановке двух первых значков ввиду их равенства, с другой — должна при этом менять знак по свойству антисимметрии, откуда следует $\varepsilon_{112} = 0$. Если совпадающие значки не соседние, например ε_{121}, то вывод не изменяется, так как из той же антисимметрии следует $\varepsilon_{121} = -\varepsilon_{112} = 0$.]

Таким образом, отличными от нуля могут быть лишь те компоненты ε_{ikl}, у которых все три индекса имеют разные цифровые значения. Поскольку каждый из индексов может принимать лишь три возможных значения 1, 2, 3, ясно, что один из этих трех индексов обязательно должен быть равен 1, второй — 2, третий — 3. Очевидно, что все такие наборы получаются перестановками тройки 1, 2, 3. Таких перестановок всего $3! = 6$, а именно три “циклических” (123, 231, 312) и три “антициклических” (213, 132, 321). Поскольку все отличные от нуля компоненты ε_{ikl} получаются из одной перестановками индексов, для полного задания ε_{ikl} достаточно задать всего лишь одну ненулевую компоненту, что мы и сделали (см. выше): $\varepsilon_{123} = 1$. Тогда для четных (циклических) перестановок имеем $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, а для нечетных (антициклических) $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$, все прочие компоненты ε_{ikl} равны нулю.

Соглашение: если в формуле некоторый значок повторяется дважды, то по нему подразумевается суммирование по всем его возможным значениям, в нашем случае трехмерного пространства, — по 1, 2, 3. Например,

$$A_i B_i \equiv \sum_{i=1}^{3} A_i B_i \equiv (AB)$$

— *скалярное произведение* векторов A и B. *Замечание:* поскольку значение суммы не зависит, очевидно, от обозначения индекса суммирования, его можно произвольно изменять, например, $A_i B_i = A_k B_k$ и т. п.

Но в многократных суммах следует следить за тем, чтобы для каждого из суммирований использовался отличный от всех других индекс. Например, для произведения двух скалярных произведений типа $(AB)(CD)$ можно использовать запись $A_iB_iC_kD_k$, но ни в коем случае нельзя писать $A_iB_iC_iD_i$ — такое выражение при наших соглашениях не имеет смысла.

Формальное правило: любой из индексов типа $i, k, l, ...$ в любом из выражений может встречаться либо один раз (тогда его называют "свободным" и он может принимать любое конкретное цифровое значение 1, 2, 3), либо два раза (и тогда это "индекс суммирования", который можно произвольно менять, в отличие от свободного индекса). При записи формул нужно тщательно следить за тем, чтобы для всех индексов суммирования использовались буквы, отличные от уже имеющихся свободных индексов, и чтобы для разных (многократных) суммирований использовались разные (неважно какие, но обязательно разные и отличные от свободных) буквенные индексы.

Если в выражении присутствует символ δ с каким-нибудь индексом суммирования, то выражение упрощается, так как "каждый символ δ снимает одно суммирование". Например, $A_i\delta_{ik} = A_k$, $A_iB_k\delta_{ik} = A_iB_i = A_kB_k$ и т. п.

Векторное произведение $[A \times B]$ двух векторов A и B есть новый вектор, компоненты которого определяются соотношениями

$$
\begin{aligned}
[A \times B]_1 &= A_2B_3 - A_3B_2, \\
[A \times B]_2 &= A_3B_1 - A_1B_3, \\
[A \times B]_3 &= A_1B_2 - A_2B_1
\end{aligned}
$$

(отметим, что второе и третье соотношения получаются из первого циклическими перестановками). С помощью введенного выше символа ε все эти три соотношения можно записать в виде одной формулы (по повторяющимся индексам k, l суммирование):

$$[A \times B]_i = \varepsilon_{ikl}A_kB_l.$$

Формулы свертки двух ε. Приведем без вывода следующие очень полезные соотношения: свертка двух ε по одному, по двум значкам

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{sml} = \delta_{is}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ks},$$
$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{skl} = 2\delta_{is},$$

по трем $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{ikl} = 6$ (эту формулу приводим только для полноты, практически важны лишь две первые). Выше мы привели каноническую запись, в которой индексы суммирования (l в первой формуле и k, l во второй) занимают одинаковое положение в двух множителях ε. Но их, конечно, можно переставлять, учитывая антисимметрию ε.

При практическом использовании подобных формул конкретные обозначения индексов ε могут быть любыми, поэтому запоминать нужно не явный вид написанных выше выражений, а общий принцип их построения. При каноническом (т. е. одинаковом для двух множителей ε) положении индексов суммирования этот принцип для второй формулы очень прост: ответ есть удвоенный δ-символ по двум остающимся свободным индексам. В первой формуле у каждого множителя ε остаются два свободных индекса и для канонического (одинакового) положения индекса суммирования расстановка индексов в комбинации $\delta\times\delta - \delta\times\delta$ в правой части определяется следующим простым правилом:

[первый, первый][второй, второй] – [первый, второй][второй, первый].

Термины “первый, второй” обозначают, соответственно, первый и второй из остающихся в каждом символе ε свободных индексов. В приведенной выше записи такими индексами у первого множителя ε являются i, k, а у второго — s, m, поэтому [первый, первый][второй, второй] $= is, km$, а [первый, второй][второй первый] $= im, ks$.

Знание формул свертки двух ε избавляет от необходимости запоминать множество различных формул векторного анализа. В качестве примера приведем вывод известной формулы “БАЦ–ЦАБ”: $[A \times [B \times C]] = B(AC) - C(AB)$. Из приведенных выше формул для “i-компоненты” исходного объекта получаем:

$$[A \times [B \times C]]_i = \varepsilon_{ikl}A_k[B \times C]_l = \varepsilon_{ikl}A_k\varepsilon_{lsm}B_sC_m = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{sml}A_kB_sC_m =$$
$$= (\delta_{is}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ks})A_kB_sC_m = A_kB_iC_k - A_kB_kC_i$$
$$\equiv B_i(AC) - C_i(AB),$$

что и требовалось доказать.

Основные понятия векторного анализа. Сейчас речь пойдет об объектах, зависящих от пространственных координат $x = \{x_i, i = 1, 2, 3\}$, напомним обозначение $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$.

1. *Градиент* $\nabla\varphi$ скаляра φ есть вектор с компонентами

$$(\nabla\varphi)_i = \partial_i\varphi.$$

2. *Дивергенция* $\operatorname{div} A$ вектора A есть скаляр

$$\operatorname{div} A = \partial_i A_i.$$

3. *Ротор* вектора A есть вектор $\operatorname{rot} A$ с компонентами

$$(\operatorname{rot} A)_i = \varepsilon_{ikl}\partial_k A_l.$$

В соответствии с нашим соглашением, везде подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

В формулах будет также часто встречаться *оператор Лапласа*

$$\Delta \equiv \partial_i\partial_i$$

— сумма вторых производных по всем координатам.

Известные соотношения $\operatorname{div}\operatorname{rot} A = 0$, $\operatorname{rot}\nabla\varphi = 0$ на нашем языке — следствия антисимметрии ε. Например,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} A = \partial_i(\operatorname{rot} A)_i = \partial_i\varepsilon_{ikl}\partial_k A_l = \varepsilon_{ikl}\partial_i\partial_k A_l = 0$$

как свертка симметричного по индексам i, k объекта $\partial_i\partial_k$ с антисимметричным по этим индексам символом ε_{ikl}.

Общее правило: свертка симметричного по любой паре индексов объекта с антисимметричным равна нулю.

Действительно, пусть объект $A_{ik\ldots}$ симметричен по ik (многоточие — любые другие индексы при их наличии), а $B_{ik\ldots}$ — антисимметричен (т. е. $A_{ik\ldots} = A_{ki\ldots}$ и $B_{ik\ldots} = -B_{ki\ldots}$ с сохранением положения всех обозначаемых многоточием других индексов). Тогда $A_{ik\ldots}B_{ik\ldots} = 0$. Для доказательства достаточно переставить мысленно индексы суммирования i, k. При такой перестановке, с одной стороны, ответ не должен изменяться, так как он не зависит от обозначения индексов суммирования, с другой стороны, он должен изменить знак в силу предполагаемых свойств симметрии A и B. Поэтому “объект равен минус себе”, следовательно, равен нулю.

В дальнейшем мы будем часто использовать это правило, говоря коротко "свертка симметричного с антисимметричным по такой-то паре индексов". Равенство $\operatorname{rot}\nabla\varphi = 0$ доказывается точно такими же соображениями.

Знание формул свертки двух ε помогает при выводе различных справочных формул векторного анализа. В качестве примера выведем известное равенство $\operatorname{rot}\operatorname{rot}A = \nabla\operatorname{div}A - \Delta A$, в котором $\Delta = \partial_i\partial_i$ — оператор Лапласа. Имеем: $(\operatorname{rot}\operatorname{rot}A)_i = \varepsilon_{ikl}\partial_k(\operatorname{rot}A)_l = \varepsilon_{ikl}\partial_k\varepsilon_{lsm}\partial_s A_m = (\delta_{is}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ks})\partial_k\partial_s A_m = \partial_i\partial_k A_k - \partial_k\partial_k A_i \equiv \partial_i\operatorname{div}A - \Delta A_i$, что и требовалось доказать.

Поток и циркуляция. *Поток* вектора A через некоторую (замкнутую или незамкнутую) поверхность S с заданным направлением нормали к ней есть поверхностный интеграл $\iint A_n ds$, дифференциалом которого является произведение площади ds участка поверхности на величину нормальной проекции A_n значения вектора A на данном участке.

Теорема Остроградского — Гаусса:

$$\int\limits_V dx\operatorname{div}A = \iint\limits_C A_n ds,$$

где V — произвольный объем, $dx \equiv dx_1dx_2dx_3$ — дифференциал объема, S — замкнутая поверхность, ограничивающая данный объем, нормаль внешняя. Словесно: объемный интеграл от дивергенции любого вектора равен потоку этого вектора наружу через поверхность, ограничивающую данный объем.

Циркуляцией вектора A по некоторому замкнутому контуру C в заданном направлении обхода называют контурный интеграл $\int dx_iA_i$, дифференциалом которого является скалярное произведение вектора A_i на данном участке на соответствующий вектор dx_i, направленный по касательной к контуру в заданном направлении и равный по модулю длине рассматриваемого бесконечно малого участка.

Теорема Стокса:

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot}A)_n ds = \int\limits_C dx_iA_i,$$

т. е. поток ротора любого вектора через любую незамкнутую поверхность равен циркуляции этого вектора по контуру, ограничивающему эту поверхность. При этом направление нормали к поверхности и направление обхода контура должны быть согласованы. Правило согласования зависит от системы отсчета: если это система “правая = штопорная” (т. е. такая, в которой вращение оси “1” к оси “2” дает по “правилу штопора” нужное направление оси “3”, все прочее — циклическими перестановками), то направление обхода контура C и нормали к поверхности S согласуется обычным “правилом штопора”. Для “левой” системы — наоборот.

Закончив на этом данное “математическое отступление”, возвращаемся непосредственно к электродинамике.

1.3 Интегральная форма уравнений Максвелла

Вернемся к уравнениям Максвелла (1)–(4). Допустим, что входящие в них объемные плотности источников ρ, j и (как следствие) решения для напряженностей E, H являются гладкими, так что уравнения справедливы для любой точки пространства x. Тогда эти уравнения можно проинтегрировать либо по произвольному объему (для уравнений с div), либо по произвольной незамкнутой поверхности S, вычисляя поток ротора (для уравнений с rot). Превращая объемный интеграл от дивергенции вектора в его поток из объема, а поток ротора вектора — в его циркуляцию по ограничивающему поверхность контуру, получим следующий интегральный эквивалент дифференциальных уравнений Максвелла (1)–(4):

$$\iint H_n ds = 0, \tag{6}$$

$$\int dx_i E_i + \frac{1}{c}\partial_t \iint H_n ds = 0, \tag{7}$$

$$\iint E_n ds = 4\pi \int dx \rho \equiv 4\pi Q_v, \tag{8}$$

$$\int dx_i H_i - \frac{1}{c}\partial_t \iint E_n ds = \frac{4\pi}{c} \iint j_n ds \equiv \frac{4\pi}{c} I_s, \tag{9}$$

где Q_v — полный заряд внутри рассматриваемого объема, а I_s — полный ток, протекающий через ограниченную заданным контуром поверхность. Мы не указываем под знаками интегралов уточняющих символов типа V, S, полагая, что и так все ясно из приведенных выше формулировок теорем Остроградского — Гаусса и Стокса. Отметим, что уравнение (7) есть закон электромагнитной индукции Фарадея, так как циркуляция вектора E по замкнутому контуру имеет смысл ЭДС, развиваемой в контуре, а из (7) следует, что эта величина пропорциональна скорости изменения магнитного потока через ограниченную контуром поверхность, в чем и состоит закон Фарадея. Отметим также, что уравнение (8) — интегральная форма закона Кулона — очень полезно в электростатике при вычислении напряженностей для простых систем, у которых плотность заряда ρ обладает определенной симметрией. В качестве простейшего примера напомним вывод известной формулы $E = Q/r^2$ для напряженности точечного заряда Q. Если поместить его в начало координат и окружить сферой произвольного радиуса r, то поток E через эту сферу находится элементарно: ввиду сферической симметрии ясно, что вектор E везде направлен по нормали к поверхности сферы и по модулю одинаков для всех ее точек, так что поток есть просто произведение $E = E_n$ на площадь сферы $4\pi r^2$. Приравнивая поток величине $4\pi Q$ согласно (8), получаем $E = Q/r^2$. Направление вектора E (по нормали наружу при $Q > 0$) легко определяется из теоремы Остроградского — Гаусса. Тем же методом легко найти выражения для напряженности при любом другом сферически симметричном распределении заряда (для дальнейшего отметим важное следствие: если такой заряд “локализован”, т. е. сосредоточен в некотором конечном объеме, то вне его он создает точно такое же поле, как точечный суммарный заряд Q в центре системы). Аналогичные рассуждения позволяют легко найти напряженность E для равномерно заряженной бесконечной плоскости или системы параллельных плоскостей (в частности, для конденсатора), для равномерно заряженной бесконечной линии и т. п.

В заключение напомним, что в этом разделе мы предполагали гладкость всех величин, тогда дифференциальная и интегральная формы уравнений Максвелла полностью эквивалентны. Действительно, выше мы приводили вывод интегральной формы из дифференциальной; из математики известно, что можно выполнить и обратную процедуру, пользуясь произвольностью объемов и поверхностей и переходя к бесконечно малым величинам.

1.4 Соотношение между дифференциальной и интегральной формами уравнений Максвелла при наличии поверхностей разрыва. Краевые условия (условия сшивания)

Допустим теперь, что есть некоторая поверхность S, на которой сосредоточены поверхностные заряды и токи, а вне ее — обычные объемные распределения с гладкими ρ и j. Хорошо известно (и ниже будет доказано), что при переходе через такую поверхность напряженности E, H испытывают конечные скачки, т. е. их предельные значения при подходе к поверхности S с двух разных сторон существуют, но различны. На самой поверхности из-за разрывов производные E, H не существуют, так что дифференциальные уравнения Максвелла (1)–(4) имеют смысл только вне S с двух сторон.

В такой ситуации стандартный вывод интегральной формы уравнений Максвелла из дифференциальной справедлив лишь для тех объемов (в теореме Гаусса) или поверхностей (в теореме Стокса), которые целиком находятся с одной из двух сторон границы раздела S, не пересекая ее. Понимаемая в таком "узком смысле" интегральная форма уравнений Максвелла, естественно, полностью эквивалентна дифференциальной.

Но для математической корректности постановки задачи при наличии поверхности разрыва S дифференциальных уравнений вне S недостаточно — нужны еще определенные "краевые условия", т. е. условия сшивания решений с двух сторон S. В чистой математике краевые условия обычно считаются некоторыми дополнительными требованиями, которые добавляются к дифференциальным уравнениям и могут быть различными (типичные примеры — задача Дирихле или задача Неймана для уравнения Лапласа с границами). В электродинамике это не так, поскольку искомые условия сшивания однозначно определяются самой физикой задачи. Они выводятся из интегральных уравнений Максвелла, понимаемых "в широком смысле", а именно, считающихся справедливыми для любых областей интегрирования, в том числе и пересекающих границу раздела S. Такое обобщение — постулат, поскольку интегральные уравнения для таких областей нельзя получить обычным образом из дифференциальных. Интегральные уравнения "в широком смысле" содержат в себе не только обычные дифференциальные уравнения вне поверхности S, но и условия сшивания решений на этой поверхности, в чем мы убедимся ниже. У этого постулата есть очень простое физическое обоснование: бесконечно тонкая поверхность S — идеализация, подобная понятию материальной точки в механике. В реальной жизни все "размазано", т. е. граница раздела S должна иметь некоторую конечную толщину. Тогда все сводится к обычным объемным распределениям источников, для которых интегральная форма справедлива при любом выборе объемов или поверхностей интегрирования, в том числе и для пересекающих размазанную границу раздела. Такие соотношения должны, очевидно, сохраниться и после предельного перехода к бесконечно тонкой поверхности S (толщина границы раздела стремится к нулю, а объемные плотности источников внутри нее — к бесконечности, так что произведение этих величин стремится к некоторым постоянным, определяющим поверхностные плотности источников). Эти простые соображения и позволяют принять "расширенный вариант" интегральной формы уравнений Максвелла в качестве постулата.

Покажем теперь, как из него выводятся краевые условия. Поверхность раздела S будем предполагать гладкой, а пересекающие ее объемы в теореме Гаусса или поверхности в теореме Стокса — малыми, рассматривая затем предел их стремления к бесконечно малым. Ясно, что в таком пределе можно пренебречь кривизной поверхности, считая ее плоской, а напряженности E и H с каждой стороны границы — пространственно однородными, но при этом не одинаковыми с двух сторон (их будем различать индексами I, II). Для определенности выберем в качестве поверхности раздела плоскость 1, 2, тогда нормалью к ней будет ось 3 (см. рис. 1.1). Система отсчета на рисунке выбрана правой (= "штопорной").

Рассмотрим сначала интегральную форму закона Кулона (8) и возьмем в качестве "объема интегрирования" показанный на рис. 1.1 пересекающий границу раздела цилиндр. Обозначим его радиус через R, высоту — h и рассмотрим предел $R \to 0$ и $h \to 0$, причем так, что h стремится к нулю быстрее, чем R (для конкретности можно положить $h \propto R^2$). Условие $h/R \to 0$ удобно тем, что позволяет при вычислении потока вектора E учитывать лишь вклад двух "донышек" цилиндра, пропорциональный их площади $S_{\text{дон}} = \pi R^2$, пренебрегая вкладом в поток от боковой поверхности как величиной высшего порядка малости при $R \to 0$. Тогда с нужной точностью ($\propto R^2$) поток есть $S_{\text{дон}}(E_3^{II} - E_3^{I})$ и должен быть равен, согласно (8), величине $4\pi Q_v$ с учетом в Q_v лишь вкладов порядка R^2. Ясно, что вклад такого порядка может порождаться только поверхностным зарядом

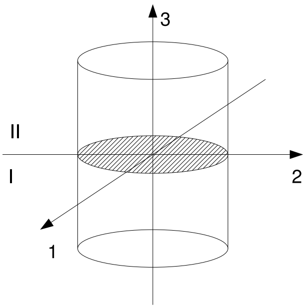

Рис. 1.1. Объем интегрирования в интегральной форме закона Кулона, уравнение (8)

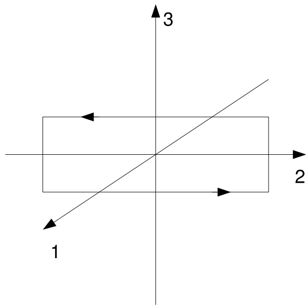

Рис. 1.2. Выбор контуров интегрирования в плоскости осей "2, 3" для использования теоремы Стокса в уравнении (9)

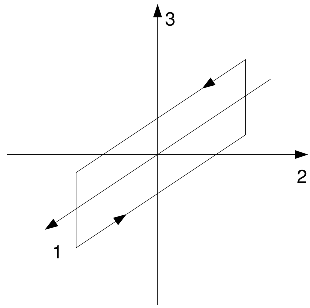

Рис. 1.3. Выбор контуров интегрирования в плоскости осей "3, 1" для использования теоремы Стокса в уравнении (9)

на границе раздела S и равен $\sigma S_{\text{дон}}$, где σ — поверхностная плотность заряда (объемный заряд с непрерывной плотностью ρ дает в Q_v несущественный вклад высшего порядка малости при $R \to 0$). Приравнивая поток E и $4\pi Q_v$ и сокращая $S_{\text{дон}}$, получаем $E_3^{II} - E_3^{I} = 4\pi\sigma$ или $\Delta E_n = 4\pi\sigma$, где символ Δ в данном случае обозначает "приращение" = "скачок" (не путать с оператором Лапласа), а E_n — нормальную составляющую вектора E.

Ясно, что изложенные выше на примере соотношения (8) построения справедливы для любых уравнений такого типа. В частности, из (6) следует $\Delta H_n = 0$, т. е. нормальные компоненты вектора H на границе раздела непрерывны. Общий принцип, который будет в дальнейшем использоваться, состоит в следующем: всякое уравнение с дивергенцией некоторого вектора через свою интегральную форму порождает соответствующее краевое условие для скачка нормальной составляющей данного вектора.

Обратимся теперь к "роторным уравнениям" и их интегральной форме, начав с уравнения (9). Аналогом поверхностной плотности заряда σ будет теперь плотность поверхностного тока i — двумерный вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности раздела S в любой ее точке. В нашем случае (см. рис. 1.2 и 1.3) это вектор в плоскости "1, 2" с компонентами $i_{1,2}$. Его модуль по смыслу есть количество заряда, протекающего за единицу времени через единицу длины линии, поставленной в плоскости раздела поперек направления вектора i.

При использовании теоремы Стокса в (9) выберем сначала контур так, как показано на рис. 1.2, а затем — как на рис. 1.3. Натянутая на такие контуры поверхность пересекает границу раздела, а указанное стрелками направление обхода контуров выбрано так, чтобы определенная по "правилу штопора" нормаль к этим поверхностям совпадала с положительным направлением ортогональной им оси ("1" для рис. 1.2 и "2" для рис. 1.3). Каждый из контуров — прямоугольник, длину его горизонтального ребра обозначим через l, а вертикального — через h, и будем рассматривать предел $l \to 0$, $h \to 0$, причем $h/l \to 0$ (например, $h \propto l^2$), чтобы при вычислении циркуляции вектора H по контуру можно было бы не учитывать вклад вертикальных участков. Тогда циркуляция вектора H по контуру с учетом лишь вкладов порядка l есть $l(H_2^I - H_2^{II})$ для контура на рис. 1.2 и $l(H_1^{II} - H_1^I)$ для контура на рис. 1.3, а поток поверхностного тока (объемный в этом порядке по l вклада не дает) равен $i_1 l$ в первом случае и $i_2 l$ во втором.

Остается рассмотреть лишь вклад с $\partial_t E$ в уравнении (9). При естественном предположении ограниченности $|\partial_t E| < \text{const}$ очевидно, что этот вклад оценивается сверху площадью lh, натянутой на контур поверхности, и пренебрежим по сравнению с вкладами порядка l от циркуляции. Обобщением сказанного является следующее *утверждение:* слагаемые с производными напряженностей по времени не дают вкладов в краевые условия, поэтому в динамике они точно такие же, как и в статике.

Возвращаясь к уравнению (9) и подставляя в него полученные выше выражения для циркуляции вектора H и потока поверхностного тока через натянутую на контур поверхность после сокращения общего множителя l, получим $H_2^I - H_2^{II} = (4\pi/c)i_1$ для контура на рис. 1.2 и $H_1^I - H_1^{II} = -(4\pi/c)i_2$ для контура на рис. 1.3. К этому можно добавить полученное ранее условие непрерывности нормальных составляющих $H_3^I - H_3^{II} = 0$. Все эти условия вместе можно записать в виде одного векторного равенства $H^I - H^{II} = (4\pi/c)[n \times i]$, в котором n — единичный вектор нормали к поверхности раздела, направленный по оси "3". Левую часть этого равенства можно обозначить через ΔH_t — скачок двумерного вектора касательных составляющих H_t вектора H: $\Delta H_t = (4\pi/c)[n \times i]$.

Все эти рассуждения обобщаются непосредственно на любые "роторные уравнения", в частности, из уравнения (7) следует $\Delta E_t = 0$, т. е. касательные составляющие вектора E на границе раздела непрерывны.

В заключение приведем в одном месте полный набор полученных выше краевых условий, справедливых как для динамики, так и для статики:

$$\begin{array}{ll} \Delta E_n = 4\pi\sigma, & \Delta H_n = 0, \\ \Delta E_t = 0, & \Delta H_t = (4\pi/c)[n \times i], \end{array} \tag{10}$$

где индексом “n” обозначаются нормальные, а индексом “t” — касательные (= “тангенциальные”) составляющие векторов.

1.5 Уравнение непрерывности, закон сохранения заряда

Вернемся к дифференциальным уравнениям (1)–(4). Применим операцию ∂_t к обеим частям равенства (3) и операцию “$c\,\mathrm{div}$” к обеим частям равенства (4), затем сложим полученные таким путем соотношения. При учете равенства $\mathrm{div}\,\mathrm{rot} = 0$ левые части сокращаются, и в итоге получается соотношение

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}\, j = 0, \tag{11}$$

которое называют “уравнением непрерывности”.

Из него следует, что источники ρ, j в исходных уравнениях Максвелла не могут быть совершенно произвольными — они обязательно должны удовлетворять уравнению непрерывности (11).

Его физический смысл становится ясным, если перейти к интегральной форме с помощью теоремы Остроградского — Гаусса:

$$\partial_t \int dx \rho \equiv \partial_t Q_v = -\iint j_n ds, \tag{12}$$

где Q_v — полный заряд внутри рассматриваемого объема, а интеграл в правой части — поток вектора j наружу через ограничивающую его замкнутую поверхность.

Равенство (12) выражает закон сохранения электрического заряда: он не может ни “рождаться”, ни “исчезать”, он может только “перетекать”, т. е. заряд Q_v в любом заданном объеме V может изменяться только из-за его перетекания через внешнюю границу. Вектор j имеет смысл плотности потока заряда, а интеграл в правой части (12) — поток через внешнюю границу.

Здесь уместно отметить различие смысла терминов “сохраняется” в обычной классической механике систем с конечным числом степеней свободы и в задачах с распределенными по пространству величинами типа плотности заряда ρ в электродинамике. В первом случае термин “данная величина сохраняется” означает, что эта величина (например, энергия для консервативных систем в механике) не зависит от времени. Для распределенных по пространству величин закон сохранения всегда формулируется в виде уравнения непрерывности типа (11), в которое входит производная по времени от объемной плотности рассматриваемой величины (в (11) это заряд, но потом будут и другие примеры) и дивергенция вектора плотности потока той же величины. Если плотность потока достаточно хорошо убывает на бесконечности, так что интеграл в правой части (12) при неограниченном увеличении объема V исчезает, то “полное количество данной величины во всем пространстве” сохраняется в обычном для механики смысле, т. е. просто не зависит от времени. Но при этом “количество данной величины” в любом конечном объеме V может изменяться за счет его перетекания через границу, что и выражается уравнением непрерывности.

1.6 Переход от напряженностей к потенциалам. Уравнения Максвелла для потенциалов

Из математики известно, что всякий вектор, дивергенция которого равна нулю, может быть представлен в виде ротора некоторого другого вектора, а вектор, ротор которого равен нулю, является градиентом некоторого скаляра. Поэтому из первого уравнения Максвелла (1) следует, что существует некоторый вектор A такой, что $H = \operatorname{rot} A$. Подставляя это выражение для H в уравнение (2), получаем $\operatorname{rot} E + c^{-1}\partial_t \operatorname{rot} A = \operatorname{rot}(E + c^{-1}\partial_t A) = 0$. Отсюда следует, что стоящая под общим знаком rot величина является градиентом некоторого скаляра, который принято обозначать через φ: $E + c^{-1}\partial_t A = -\nabla\varphi$. Функцию φ называют скалярным потенциалом, A — векторным потенциалом.

Таким образом, мы получили следующие формулы, выражающие напряженности E, H через потенциалы φ, A:

$$H = \operatorname{rot} A, \quad E = -\nabla\varphi - c^{-1}\partial_t A. \tag{13}$$