А. А. Черняк
В. А. Новиков
О. И. Мельников
А. В. Кузнецов

Математика для экономистов на базе Mathcad

- **_Математическая статистика и корреляционно-регрессионный анализ_**
- **_Линейное, нелинейное и динамическое программирование_**
- **_Модели управления запасами и массового обслуживания_**
- **_Балансовые модели многоотраслевой экономики и международной торговли_**
- **_Основы программирования в среде Mathcad_**

Учебное пособие

**Аркадий Черняк, Василий Новиков,
Олег Мельников, Альберт Кузнецов**

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ НА БАЗЕ MATHCAD

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2014

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2
Ч-49

Черняк А. А., Новиков В. А., Мельников О. И., Кузнецов А. В.

Ч-49 Математика для экономистов на базе Mathcad. — СПб.: БХВ-Петербург, 2014. — 496 с.: ил.

ISBN 5-94157-282-4

Учебное пособие охватывает следующие разделы: основы компьютерного пакета Mathcad, линейную алгебру, математическое программирование, исследование операций, экономико-математические модели, математическую статистику, корреляционный и регрессионный анализ. Содержание теоретического материала соответствует государственным образовательным стандартам, а структура ориентирована на нетривиальное использование пакетов компьютерной математики. Многие задачи снабжены подробными решениями или демонстрационными примерами.

Книга может служить в качестве учебно-методического комплекса по циклу математических дисциплин в экономических и технических высших учебных заведениях.

Для студентов экономических и технических специальностей вузов

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2

Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов экономических и технических
специальностей высших учебных заведений

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Анатолий Адаменко*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Анатолий Хрипов*
Компьютерная верстка	*Татьяны Олоновой*
Корректор	*Вера Александрова*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Формат 70×100 1/16. Усл. печ. л. 39,99. Доп. тираж 32 экз.
"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

Отпечатано в цифровой типографии "Галерея печати "ИПК НП-Принт"
190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

ISBN 5-94157-282-4

Содержание

Когда дует ветер перемен, надо строить не щит от ветра,
а ветряные мельницы.

Восточная мудрость

Предисловие

Преподавание математики в настоящее время переживает четвертый этап революционных перемен, связанных с появлением мощных компьютерных пакетов: Mathcad, Mathematica, Mathlab, Derive, Theorist и т. д. (первые три этапа этой революции в свое время знаменовались соответственно появлением счетной доски, бухгалтерских счетов и микрокалькулятора). Поэтому главный побудительный мотив написания данной книги — синтезировать традиционные принципы преподавания математики на экономических факультетах вузов с новейшими достижениями компьютерной математики. Следует сказать, что эта идея не нова и даже стала уже рутинной. Однако в данной книге она реализована так, чтобы удовлетворять следующим трем постулатам.

1. Компьютерная математика — это всего лишь инструмент, позволяющий сосредоточить внимание студента на понятиях и логике методов и алгоритмов, освобождая его от необходимости освоения громоздких, незапоминающихся и потому бесполезных вычислительных процедур и трюков. И использование этого инструмента только в качестве иллюстративного средства с целью "уберечь" студента от "скучной" математики, сведя ее постижение к нажатию кнопок мыши и клавиш клавиатуры, сродни комиксам, низводящим классические произведения литературы до уровня примитивных мультяшек.
2. Несмотря на всепроникающий прогресс компьютерных технологий, постижение теоретических основ математики невозможно без таких давнишних изобретений человечества, как классная доска, мел, ручка и лист бумаги.
3. В основе преподавания должен лежать компьютерный пакет, обладающий наглядным интерфейсом и универсальными возможностями.

Первый постулат повлиял на содержание и структуру теоретического материала. Книга разбита на части: I — "Линейная алгебра и линейные экономические модели", II — "Математическое программирование", III — "Модели управления запасами и системы массового обслуживания", IV — "Математическая статистика и корреляционно-регрессионный анализ"; имеется приложение — "Основной инструментарий Mathcad". Части состоят из глав, а главы разбиты на разделы: раздел теории, компьютерный раздел, блоки задач для самостоятельного решения, раздел решений и ответов.

Содержание теоретических разделов соответствует государственным образовательным стандартам, а их структура ориентирована на нетривиальное использование любых пакетов компьютерной математики. Эти разделы написаны на основании оригинальных методических разработок, что позволило традиционно сложные для усвоения понятия, методы, алгоритмы и теоремы сделать более доступными, не нанося ущерба их математической строгости.

Второй постулат предопределил подборку практического материала. Разделы "Задачи для самостоятельного решения" состоят из блоков обучающих задач трех видов: "Т" — теоретических, "П" — практических, "К" — компьютерных. Задачи типа "Т" ориентированы на углубленное постижение теории; во многих случаях они дополняют содержание глав, давая возможность студенту творчески осмыслить материал с помощью самостоятельных выводов и доказательств, сверив их затем с приводимыми в разделах "Ответы, указания, решения". Задачи типа "П" предназначены для приобретения практических навыков в освоении алгоритмов и методов, доступных для "ручного" счета и обработки. При этом каждый блок таких задач содержит ровно по 20 однотипных примеров, в обязательном порядке сопровождаемых демонстрационными задачами с подробными решениями (что позволяет использовать их в качестве практикума для студентов-заочников). Задачи типа "К", недоступные для "ручной" обработки, ориентированы исключительно на использование пакета компьютерной математики. Каждый блок таких задач содержит по 10 однотипных примеров, в обязательном порядке сопровождаемых алгоритмом решения с помощью операторов и функций Mathcad.

И наконец, третий постулат предопределил компьютерную основу данной книги – это Mathcad. Mathcad выгодно отличается от других пакетов возможностью свободно компоновать рабочий лист и относительной легкостью изучения. Так же, как с карандашом в руке решается задача на листе бумаги, в принципе, можно оформить и соответствующий Mathcad-документ. Если некоторое время не возникает необходимости работать с Mathcad, то впоследствии навыки пользования пакетом легко восстанавливаются. В других же пакетах компьютерной математики используется очень сложный синтаксис, который быстро забывается, если не работать с этим пакетом постоянно. Кроме того, Mathcad — это универсальная, а не специализированная математическая среда.

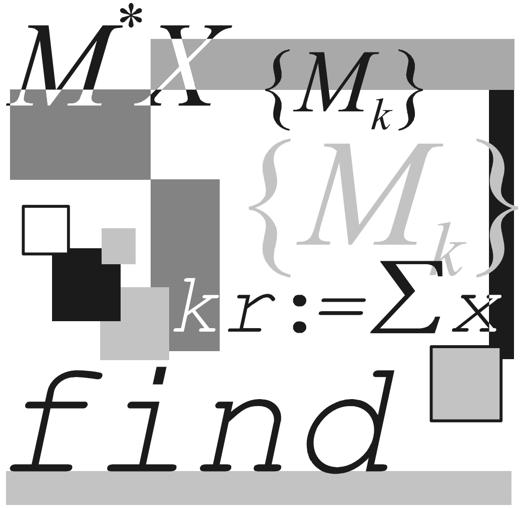
В книге элементы, функции и процедуры Mathcad с иллюстрациями и примерами описываются в компьютерных разделах соответствующих глав, а их возможности демонстрируются на примере алгоритмов решения компьютерных задач из этих глав. При этом из многовариантных возможностей Mathcad выбраны наиболее оптимальные способы использования элементов этого пакета. Благодаря компьютерным разделам изъяты громоздкие вычислительные процедуры, неизменно сопутствующие методам и алгоритмам математического программирования. В тексте в качестве разделителя дроби используется точка в соответствии со спецификацией программы Mathcad.

Теперь несколько слов о структуре учебника. Нумерация глав сквозная. Теоремы, утверждения, леммы, следствия, рисунки, формулы и задачи нумеруются двумя числами: первое из них — это номер главы, второе — их порядковый номер в самой главе. Та или иная процедура, функция, оператор Mathcad подробно описываются в компьютерном разделе именно той главы, где они впервые встречаются. Поэтому освоение пакета Matcad идет параллельно с математической теорией. В приложении, дополняющем компьютерные разделы в главах, дается обзор панелей инструментов, описание основных команд меню и способы редактирования формул.

При подготовке книги работа между авторами была распределена следующим образом: главы 8, 9, 12—14, 28, 32—33, 39—50 написаны А. А. Черняком, глава 20 — О. И. Мельниковым, главы 10, 11, 36—38 — совместно А. А. Черняком и Д. А. Черняк, главы 1 – 7, 15 – 19, 21 – 27, 29, 31, 34 написаны совместно А. А. Черняком и О. И. Мельниковым, главы 30, 35 — совместно А. А. Черняком и А. В. Кузнецовым, приложение — совместно А. А. Черняком и В. А. Новиковым, задачи типа "П" для глав 17, 19, 23, 28, 30, 35, 46, 47 составлены А. В. Кузнецовым, компьютерный набор и редактирование текста осуществлен В. А. Новиковым.

Авторы также признательны студентке Д. А. Черняк выпускного курса факультета "Business Administration" Нью-Йоркского государственного университета за помощь в написании глав 10, 11, 36—38.

Авторы: доктор физико-математических наук, профессор, лауреат премии Академии наук Беларуси А. А. Черняк, кандидат технических наук, доцент В. А. Новиков, кандидат физико-математических наук, доцент, лауреат Государственной премии Беларуси О. И. Мельников, кандидат технических наук, профессор А. В. Кузнецов.



Часть I

Линейная алгебра и линейные экономические модели

Глава 1

n-мерное векторное пространство действительных чисел

Вектором $\vec{a}$ размерности *n* называется упорядоченная последовательность *n* действительных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Числа $a_1, \ldots, a_n$ называются координатами вектора $\vec{a}$. Два вектора $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ одинаковой размерности называются равными, если они равны покоординатно: $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$. Вектор $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ называется нулевым. Длиной $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется число $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$.

Операции над векторами:

- сложение векторов одинаковой размерности: суммой двух векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется вектор $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$.
- умножение вектора на скаляр: произведением вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на действительное число α называется вектор $\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$.
- скалярное произведение двух векторов одинаковой размерности: число $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ называется скалярным произведением двух векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ и будет обозначаться $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Теорема 1.1 (основные свойства операций над векторами).

1. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;
2. $|\vec{a}|^2 = [\vec{a} \cdot \vec{a}]$;
3. $|\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$
4. $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = [\vec{b} \cdot \vec{a}]$;
5. $\alpha[\vec{a} \cdot \vec{b}] = [\alpha\vec{a} \cdot \vec{b}] = [\vec{a} \cdot \alpha\vec{b}]$;
6. $[(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}] = [\vec{a} \cdot \vec{c}] + [\vec{b} \cdot \vec{c}]$;
7. $[(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d})] = [\vec{a} \cdot \vec{c}] + [\vec{a} \cdot \vec{d}] + [\vec{b} \cdot \vec{c}] + [\vec{b} \cdot \vec{d}]$.

Доказательство теоремы дано в задаче Т1.2.

Теорема 1.2.

$$-1 \le \frac{[\vec{a} \cdot \vec{b}]}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \le 1$$

Доказательство теоремы дано в задаче Т1.6.

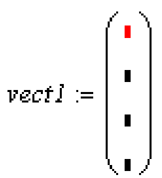
Именно ввиду теоремы 1.2 величину $\dfrac{[\vec{a} \cdot \vec{b}]}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ называют косинусом угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тем более что на плоскости это понятие тождественно тригонометрическому определению угла между двумя векторами.

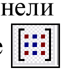
Определение

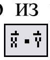
Множество всех векторов размерности *n*, в котором заданы операции сложения векторов и умножения векторов на скаляры, называется *n*-мерным векторным пространством действительных чисел и обозначается R^n.

Компьютерный раздел

Координаты векторов вводятся на рабочем листе Mathcad-документа следующим образом. Пусть, к примеру, надо ввести вектор `vect1= (3, 2, 5.6, -8)`. Разместите курсор (красный крестик) в нужном месте рабочего листа. Введите имя вектора `vect1`. Клавишей <:> введите знак присваивания :=. Комбинацией клавиш <Ctr>+<M> выведите диалоговое окно **Вставить матрицу** (Insert Matrix), изображенное на рис. 1.1. В поле **Строк** (Rows) этого окна задайте размерность вектора 4 `vect1`. В поле **Колонок** (Columns) задайте 1. Щелкните на кнопке **ОК**. Справа от знака присваивания (на месте метки, выделенной синим курсором ввода) появится шаблон вектора с метками для ввода его координат:



Некоторые операции над векторами производятся с помощью подпанели инструментов **Матрица** (Matrix), для вызова которой надо щелкнуть на кнопке  панели инструментов **Математика** (Math), показанной на рис. 1.2.

Как видно из рис. 1.3, подпанель **Матрица** (Matrix) содержит 12 кнопок. Щелкнув на кнопке  скалярного произведения, можно вывести шаблон  и на месте меток ввести векторы, участвующие в скалярном произведении. Кнопка  задает шаблон $\sum ■$ для определения суммы координат вектора, имя которого следует задать на месте метки.

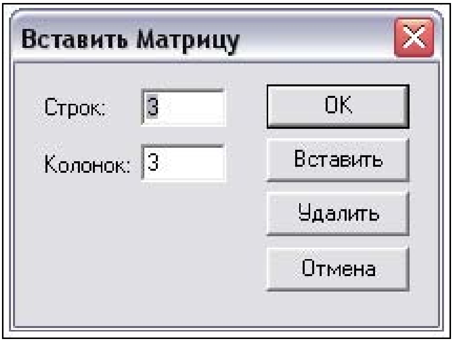


Рис. 1.1. Диалоговое окно **Вставить Матрицу**

Рис. 1.2. Панель **Математика**

Рис. 1.3. Подпанель **Матрица**

Задачи для самостоятельного решения

Т1.1. Доказать, что длина любого вектора неотрицательна, причем она равна нулю, если и только если этот вектор нулевой.

Т1.2. Доказать все свойства, сформулированные в теореме 1.1.

Т1.3. Доказать, что косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 1, если один из них равен другому, умноженному на некоторое положительное число.

Т1.4. Доказать, что косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен –1, если один из них равен другому, умноженному на некоторое отрицательное число.

Т1.5. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из пространства R^n. Переставить координаты вектора $\vec{b}$ так, чтобы косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ был максимальным.

Т1.6. Доказать теорему Т1.2.

Общая формулировка задач К1.1—К1.11

Даны векторы x и y одинаковой размерности, i-я координата вектора x — это размер в млн ден. ед. кредита, выданного банком i-й фирме, i-я координата вектора y — годовая процентная ставка этого кредита. Определить общую сумму кредита; прибыль, которую банк должен получить по истечении года за кредиты, выданные фирмам; процент прибыли от общей суммы кредитов.

К1.1. $x = (1.5, 5.2, 11, 0.7, 3.2, 33.5, 8.5, 6.3)$;

$y = (3.8, 4.5, 1.7, 6, 4.7, 12, 22.3, 17.3)$.

К1.2. $x = (5.5, 2.1, 21, 2.5, 6.2, 23.7, 9.6, 9.1, 34, 21.6, 33.2, 5.7)$;

$y = (2.6, 1.9, 5.1, 11.2, 6.8, 22.2, 2.7, 7.9, 13.5, 23.5, 8.3, 8.1)$.

К1.3. $x= (5.3, 1.4, 13.2, 2.7, 4.4, 13.4, 28.3, 4.2, 23.5, 6.3, 12.5)$;

$y = (8.8, 5.1, 3.8, 9.7, 13.7, 21.4, 12.5, 7.7, 8.1, 23.4, 4.6)$.

К1.4. $x = (16.5, 25.5, 1.1, 2.8, 18.2, 45.1, 13.6, 5.3, 55.1, 4.6, 2.6, 14.5, 45.2, 23.1)$;

$y = (7.8, 9.5, 7.7, 16, 4.8, 22, 32.4, 27.5, 1.1, 32.4, 6.3, 8.3, 11.1, 8.3)$.

К1.5. $x = (11.5, 25.2, 31, 3.7, 5.2, 23.5, 8.8, 3.3, 17.2, 8.2, 11.4, 34.1)$;

$y = (5.8, 14.5, 11.7, 16, 8.7, 32, 32.7, 27.3, 12.4, 23.1, 31.2, 44.6)$.

К1.6. $x = (7.6, 9.1, 12, 2.3, 13.2, 24.5, 18.5, 9.3, 42.1, 23.4)$;

$y = (6.8, 4.3, 6.7, 6.5, 14.7, 16.4, 32.5, 27.3, 11.7, 34.6)$.

К1.7. $x = (5.5, 15.4, 21.4, 3.7, 5.2, 13.5, 5.3, 13.5, 23.4, 21.2, 6.3)$;

$y = (6.3, 8.4, 6.7, 3.4, 9.3, 22.5, 2.3, 6.3, 21.6, 33.2, 12.8)$.

К1.8. $x = (33.5, 51.2, 19.3, 7.7, 8.2, 43.5, 28.4, 8.6, 31.3, 42.4, 35.2, 12.5, 3.4, 4.5, 42.1, 2.4, 11.4)$;

$y = (7.8, 6.4, 3.8, 9.4, 3.2, 22.3, 2.5, 7.3, 4.1, 23.2, 13.5, 24.2, 45.2, 5.6, 7.5, 21.2, 7.2)$.

К1.9. $x = (7.5, 25.1, 1.9, 4.7, 5.2, 23.1, 18.5, 16.3, 23.1, 24.5, 31.2, 41.2, 9.3, 1.2)$;

$y = (4.8, 6.5, 3.7, 7.6, 8.7, 32.2, 2.3, 7.5, 6.2, 8.2, 23.6, 42.2, 7.2, 8.1)$.

К1.10. $x = (4.2, 15.1, 21.3, 2.7, 4.4, 3.8, 18.3, 2.3, 17.3, 34.1)$;

$y = (4.8, 6.2, 11.7, 16.2, 8.7, 32.4, 2.3, 7.3, 9.1, 21.2)$.

К1.11. $\mathrm{x} = (14, 81, 76, 300, 2.6, 2.7, 2.7, 12, 15.7, 121, 98, 123.5, 80, 0.5, 0.65, 14, 25, 258, 2.5, 2.5)$;

$\mathrm{y} = (18, 16, 16, 12, 19, 19, 18, 18, 13, 13, 14, 12, 21, 22, 12.5, 12, 12.5, 10.5, 18, 18)$.

Ответы, указания, решения

Т1.2. Докажем второе, пятое и шестое свойства. Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$.

Тогда $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_1a_1 + a_2a_2 + \ldots + a_n a_n = [\vec{a}\cdot\vec{a}]$;

$\alpha[\vec{a}\cdot\vec{b}] = \alpha(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) = (\alpha a_1)b_1 + (\alpha a_2)b_2 + \ldots + (\alpha a_n)b_n = [\alpha\vec{a}\cdot\vec{b}]$;

аналогично показывается, что $\alpha[\vec{a}\cdot\vec{b}] = [\vec{a}\cdot\alpha\vec{b}]$. Так как

$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$, то

$$[(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}] = (a_1+b_1)c_1 + (a_2+b_2)c_2 + (a_n+b_n)c_n =$$
$$= a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 + \ldots + a_nc_n + b_nc_n =$$
$$=(a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n) + (b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots + b_nc_n) = [\vec{a}\cdot\vec{c}] + [\vec{b}\cdot\vec{c}]$$

Т1.3. Предположим, что $\vec{a} = \alpha\vec{b}$ и $\alpha>0$. Тогда $[\vec{a}\cdot\vec{b}] = [\alpha\vec{b}\cdot\vec{b}] = \alpha[\vec{b}\cdot\vec{b}] = \alpha|\vec{b}|^2$,

$|\vec{a}| = |\alpha\vec{b}| = |\alpha|\cdot|\vec{b}| = \alpha|\vec{b}|$. Отсюда $\dfrac{[\vec{a}\cdot\vec{b}]}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{\alpha|\vec{b}|^2}{\alpha|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|} = 1$

Т1.5. Будем считать, что координаты вектора $\vec{a}$ упорядочены в порядке неубывания: $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$. Предположим, что найдутся такие две координаты b_i, b_k вектора $\vec{b}$, что $b_i > b_k$ при $i < k$. Тогда $a_ib_i + a_kb_k < a_ib_k + a_kb_i$. Поэтому перестановка b_i и b_k не приведет к уменьшению скалярного произведения $[\vec{a}\cdot\vec{b}]$. Это означает, что величина $[\vec{a}\cdot\vec{b}]$ примет максимальное значение, если координаты вектора $\vec{b}$ будут упорядочены по неубыванию. Но перестановка координат не изменяет длин векторов. Поэтому величина $\dfrac{[\vec{a}\cdot\vec{b}]}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ максимальна, если координаты вектора $\vec{b}$ упорядочены по неубыванию.

Т1.6. Обозначим через α число $\dfrac{[\vec{a}\cdot\vec{b}]}{|\vec{b}|^2}$ и рассмотрим квадрат длины вектора $\vec{a}-\alpha\vec{b}$:

$$|\vec{a}-\alpha\vec{b}|^2 = [(\vec{a}-\alpha\vec{b})\cdot(\vec{a}-\alpha\vec{b})] = [\vec{a}\cdot\vec{a}] + [(-\alpha\vec{b})\cdot\vec{a}] + [\vec{a}\cdot(-\alpha\vec{b})] +$$
$$+[(-\alpha\vec{b})\cdot(-\alpha\vec{b})] = |\vec{a}|^2 - \alpha[\vec{a}\cdot\vec{b}] - \alpha[\vec{a}\cdot\vec{b}] + \alpha^2[\vec{b}\cdot\vec{b}] = |\vec{a}|^2 - 2\alpha[\vec{a}\cdot\vec{b}] + \alpha^2|\vec{b}|^2$$

Вместо α подставим его значение, равное $\dfrac{[\vec{a}\cdot\vec{b}]}{|\vec{b}|^2}$:

$$|\vec{a}|^2 - 2\frac{[\vec{a}\cdot\vec{b}][\vec{a}\cdot\vec{b}]}{|\vec{b}|^2} + \frac{([\vec{a}\cdot\vec{b}])^2\left|\vec{b}\right|^2}{\left|\vec{b}\right|^4} = |\vec{a}|^2 - \frac{([\vec{a}\cdot\vec{b}])^2}{|\vec{b}|^2}$$

Последнее число, являясь квадратом длины вектора $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ должно быть неотрицательным, т. е. $|\vec{a}|^2 - \dfrac{([\vec{a}\cdot\vec{b}])^2}{|\vec{b}|^2} \ge 0$, $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \ge ([\vec{a}\cdot\vec{b}])^2$, отсюда $|[\vec{a}\cdot\vec{b}]| \le |\vec{a}||\vec{b}|$,

$-|\vec{a}||\vec{b}| \le [\vec{a}\cdot\vec{b}] \le |\vec{a}||\vec{b}|$. Теорема доказана.

К1.11. Искомая прибыль будет равна скалярному произведению векторов x и y, деленному на 100. Поэтому для решения этой задачи с помощью Mathcad необходимо выполнить следующие действия. Ввести координаты векторов x и y. Определить суммарную величину кредита: $kr := \sum x$. Определить прибыль банка $pr := \frac{[x \cdot y]}{100}$.

Процент прибыли от общей суммы кредита будет равен $\frac{pr}{kr} \cdot 100$.

Ответы: 1232.35 млн ден. ед., 163.39 млн ден. ед., 13.26%.

Глава 2

Линейно независимые системы векторов

Вначале дадим определение линейной комбинации векторов.

Определение

Представим вектор $\vec{b}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, если $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k$. Если при этом не все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ равны нулю, то такую линейную комбинацию будем называть ненулевой комбинацией; если же $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$ (и следовательно $\vec{b} = \vec{0}$), то такую линейную комбинацию будем называть нулевой.

Очевидно, что нулевой вектор можно представить в виде нулевой комбинации любой системы векторов. Однако не всегда нулевой вектор представим в виде ненулевой комбинации.

Определение

Система векторов *V* из R^n называется линейно независимой, если нулевой вектор из R^n не может быть представлен в виде ненулевой комбинации векторов из *V*. В противном случае система *V* называется линейно зависимой. Другими словами, в случае линейно независимой системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ из равенства $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}$ следует, что все коэффициенты α_i, $i = 1, \ldots, k$, равны нулю; в случае линейно зависимой системы из того же равенства вытекает существование такого набора коэффициентов, среди которых есть хотя бы один ненулевой.

Пример

Если $\vec{a}_1 = (2, 2, 3)$, $\vec{a}_2 = (0, -4, 5)$, $\vec{a}_3 = (3, 13, -8)$, то непосредственно проверяется равенство $3\vec{a}_1 - 5\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 = \vec{0}$. Выполнение этого равенства означает, что система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависима.

Если система векторов *B* включает в себя все векторы системы *A*, то *A* называется подсистемой *B*.

Теорема 2.1. Если система векторов B содержит линейно зависимую подсистему векторов A, то B также линейно зависима.

Доказательство. Пусть $A = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$, $B = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r\}$. Так как A линейно зависимая система, то нулевой вектор представим в виде ненулевой комбинации векторов из A: $\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k$

Но тогда $\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k + 0\vec{b}_1 + \ldots + 0\vec{b}_r$, что означает линейную зависимость системы векторов B. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Любая подсистема векторов линейно независимой системы векторов линейно независима.

Теорема 2.2. Пусть линейно независимая система векторов A после добавления нового вектора $\vec{b}$ превратилась в линейно зависимую систему $A \bigcup \{\vec{b}\}$. Тогда вектор $\vec{b}$ представим в виде линейной комбинации векторов из A.

Доказательство. Пусть $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k\}$. Ввиду линейной зависимости системы векторов $A \bigcup \{\vec{b}\}$ нулевой вектор представим в виде ненулевой комбинации $\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k + \beta\vec{b}$. Если $\beta = 0$, то $\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k$, где не все α_i равны 0, что противоречит линейной независимости системы векторов A. Поэтому $\beta \neq 0$, откуда

$$\vec{b} = -\frac{\alpha_1}{\beta}\vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\beta}\vec{a}_k .$$

Определение

Максимально возможное число векторов в линейно независимой подсистеме системы векторов *V* называется рангом системы *V*.

Очевидно, ранг линейно независимой системы векторов равен числу векторов в этой системе.

Определение

Элементарными преобразованиями системы векторов называются:

- умножение любого вектора этой системы на ненулевое число (элементарное преобразование типа 1);
- прибавление к одному из векторов системы любого другого вектора этой системы, умноженного на произвольное число (элементарное преобразование типа 2).

Теорема 2.3. Элементарные преобразования сохраняют линейную независимость или линейную зависимость системы векторов.

Доказательство. Докажем эту теорему только для элементарных преобразований типа 2. Пусть $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k\}$, а система B получается из A в результате прибавления к первому вектору второго вектора, умноженного на число k, т. е. $B = \{\vec{a}_1 + k\vec{a}_2, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k\}$. Очевидно, равенства $\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k$,

$\vec{0} = \alpha_1(\vec{a}_1 + k\vec{a}_2) + (\alpha_2 - k\alpha_1)\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 + ... + \alpha_k\vec{a}_k$ равносильны, поскольку любое из них вытекает из другого, причем из равенства коэффициентов нулю в одном из них (например, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_k = 0$) вытекает равенство коэффициентов в другом ($\alpha_1 = \alpha_2 - k\alpha_1 = \alpha_3 = ... = \alpha_k = 0$).

Задачи для самостоятельного решения

Т2.1. Доказать, что система векторов, состоящая из единственного ненулевого вектора, линейно независима.

Т2.2. Доказать, что система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

Т2.3. Следующая система векторов называется лестничной:

$$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ ... \ , a_{1n}), a_{11} \neq 0$$

$$\vec{a}_2 = (0, a_{22}, a_{23}, \ ... \ , a_{2n}), a_{22} \neq 0$$

$$\vec{a}_3 = (0, 0, a_{33}, \ ... \ , a_{3n}), a_{33} \neq 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\vec{a}_n = (0, 0, 0, ... , 0, a_{nn}), a_{nn} \neq 0$$

Доказать, что лестничная система векторов линейно независима.

Т2.4. Доказать, что если число векторов в линейно независимой подсистеме *A* системы векторов *B* равно рангу *B*, то любой вектор из *B* представим в виде линейной комбинации векторов из *A*.

Т2.5. Доказать, что с помощью элементарных преобразований можно переставить местами любые два вектора системы векторов.

Т2.6. Доказать теорему 2.3 для элементарных преобразований типа 1.

Ответы, указания, решения

Т2.4. Пусть $\vec{b}$ — произвольный вектор из *B*. Если $\vec{b} \in A$, то все очевидно. Если $\vec{b} \notin A$, то система векторов $A \cup \{\vec{b}\}$ будет линейно зависимой по определению ранга. Тогда выполняются условия теоремы 2.2, из которой и следует искомое утверждение.

Т2.5. Следующая цепочка систем векторов показывает последовательность элементарных преобразований, которые меняют местами векторы a_i и a_m в начальной системе векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ ..., \vec{a}_k\}$:

$$\{a_1, \ ..., a_i, \ ..., a_m, \ ..., a_k\}, \ \{a_1, \ ..., a_i, \ ..., a_m + a_i, \ ..., a_k\}$$

$$\{a_1, \ ..., -a_m, \ ..., a_m + a_i, \ ..., a_k\}, \ \{a_1, \ ..., -a_m, \ ..., a_i, \ ..., a_k\}$$

$$\{a_1, \ ..., a_m, \ ..., a_i, \ ..., a_k\}$$

Глава 3

Матрицы: общие понятия

Матрицей M размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица с m строками и n столбцами, состоящая из чисел, называемых элементами матрицы M**.** Элемент матрицы, расположенный на пересечении i-й строки и k-го столбца обозначается через m_{ik}; будем говорить, что этот элемент находится на позиции (i, k). Матрица размера $n \times n$ называется квадратной матрицей порядка n. Единичной матрицей E порядка n называется квадратная матрица порядка n, в которой элементы a_{ii} равны 1, $i = 1, \ldots, n$, а остальные элементы a_{ik} $(i \neq k,\ i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, n)$ равны 0.

Говорят, что элементы a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, образуют главную диагональ квадратной матрицы порядка n.

Любую строку или столбец матрицы размера $m \times n$ можно рассматривать как вектор $\vec{a}$ пространства R^n или R^m соответственно. При необходимости они будут считаться таковыми без особых оговорок. Однако при этом следует различать, является ли вектор $\vec{a}$ строкой, которая будет называться вектор-строкой, или столбцом, который будет называться вектором-столбцом. Вектор-строка — это матрица размера $1 \times n$, а вектор-столбец — матрица размера $m \times 1$. Там, где не будет ясно из контекста, какие векторы имеются в виду, это будет уточняться дополнительно.

Операции над матрицами:

- сложить (вычесть) две матрицы одинакового размера означает сложить (вычесть) их элементы, стоящие на одинаковых позициях; при этом получится матрица того же размера;
- умножить матрицу на скаляр означает умножить на это число все элементы матрицы;
- транспонировать матрицу M означает преобразовать ее в матрицу $M^{\mathrm{т}}$, строки которой являются столбцами матрицы M с теми же номерами;
- умножить матрицу A размера $m \times l$ на матрицу B размера $l \times n$ означает получить матрицу $C = AB$ размера $m \times n$, элемент которой c_{ik} равен скалярному произведению i-й строки матрицы A и k-го столбца матрицы B, т. е.

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{il}b_{lk} = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}b_{jk}$$

Замечание

Для упрощения записи знак умножения в произведении матриц опускается.

Теорема 3.1. Пусть A, B, C, D — матрицы, D — квадратная матрица. Тогда $(AB)C = A(BC)$, $(A + B)C = AC + BC$, $C(A + B) = CA + CB$, $(AB)^{\text{т}} = B^{\text{т}}A^{\text{т}}$, $DE = ED = D$ при условии, что размеры матриц согласуются во всех операциях сложения и умножения.

Докажем последние два утверждения теоремы. Для доказательства равенства матриц $(AB)^{\text{т}}$ и $B^{\text{т}}A^{\text{т}}$ достаточно сравнить их элементы на одинаковых позициях. На позиции (i, k) в матрице $B^{\text{т}}A^{\text{т}}$ находится некоторое число c, равное скалярному произведению i-й строки матрицы $B^{\text{т}}$ и k-го столбца матрицы $A^{\text{т}}$. Но i-я строка матрицы $B^{\text{т}}$ — это i-й столбец матрицы B, а k-й столбец матрицы $A^{\text{т}}$ — это k-я строка матрицы A. Поэтому число c равно скалярному произведению k-й строки матрицы A и i-го столбца матрицы B, т. е. число c находится на позиции (k, i) матрицы AB или на позиции (i, k) матрицы $(AB)^{\text{т}}$. Свойство доказано.

Для доказательства равенства $DE = D$ рассмотрим число d на позиции (i,k) матрицы DE: если i-я строка в D есть $(d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{in})$, то $d = d_{i1}0 + d_{i2}0 + \ldots + d_{i,k-1}0 + d_{ik}1 + d_{i,k+1}0 + \ldots + d_{in}0 = d_{ik}$, так как в k-ом столбце матрицы E именно k-я координата равна 1, а остальные координаты равны 0. Итак доказано, что $DE = D$. Равенство $ED = D$ доказывается аналогично.

Замечание

Если рассматривать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как матрицы, то скалярное произведение можно записать следующим образом:

$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{a}\vec{b}^{\text{т}} = \vec{b}\vec{a}^{\text{т}}$$

Пусть задана система *m* линейных уравнений с *n* переменными, имеющая следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_{21} + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases};$$

здесь a_{ik} называются коэффициентами при переменных, c_k — свободными членами, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$. Если использовать обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_m \end{pmatrix},$$

то систему (3.1) можно записать в матричном виде так: $AX = C$. Если же использовать обозначения:

$$\vec{b}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \ldots \\ a_{mk} \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_m \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \\ \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{matrix}$$

то систему (3.1) можно записать тремя способами в векторном и векторно-матричном виде:

$$x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \ldots + x_n\vec{b}_n = \vec{c} \text{ , или } \begin{cases} [\vec{a}_1 \cdot \vec{x}] = c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\vec{a}_m \cdot \vec{x}] = c_m \end{cases} \qquad (33.2)$$

$$A\vec{x}^{\mathrm{т}} = \vec{c}$$

Компьютерный раздел

Индексы матриц и векторов в Mathcad могут принимать целые неотрицательные значения. Начало индексации (нумерации) строк и столбцов матриц задается системной переменной `ORIGIN`. Например, `ORIGIN:=0` означает, что нумерация строк и столбцов начинается с нуля. По умолчанию значение переменной `ORIGIN` равно нулю.

Ввод элементов матрицы аналогичен вводу координат векторов. Пусть, к примеру, надо ввести матрицу $mat = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 8.2 \end{pmatrix}$. В нужном месте рабочего листа введите имя матрицы `mat` и знак присваивания :=. Затем выведите диалоговое окно **Вставить матрицу** (Insert Matrix). В поле **Строк** (Rows) этого окна надо задать число строк 3, а в поле **Колонок** (Columns) — число столбцов 2. После щелчка кнопкой **ОК** справа от знака присваивания появится шаблон матрицы с метками для ввода ее элементов:

$$mat := \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}.$$

Чтобы извлечь элемент матрицы, находящийся на позиции (i, k), необходимо набрать имя матрицы с индексами i, k (индексы — через запятую) в случае равенства `ORIGIN` единице или с индексами $i-1$, $k-1$ в случае равенства `ORIGIN` нулю. Рассмотрим, например, элемент 8.2 матрицы `mat`, который находится на позиции (3,2). Предположим, что `ORIGIN` равно нулю. Для извлечения элемента 8.2 наберите имя матрицы *mat*, затем комбинацией клавиш <Ctrl>+<[> перейдите в режим ввода индексов: $\boxed{mat_{\blacksquare}}$. Введите на месте метки индексы 2, 1. Клавишей <=> введите знак равенства, справа от которого появится искомый элемент: $mat_{2,1}=8.2$.

Некоторые операции над матрицами производятся с помощью подпанели **Матрица** (Matrix), показанной на рис. 3.1. Щелчок по кнопке $\boxed{M^{T}}$ сразу же после ввода имени матрицы приводит к транспонированию этой матрицы. Щелчок по кнопке $\boxed{M^{<>}}$ сразу же после ввода имени матрицы приводит к появлению шаблона с меткой для ввода номера столбца матрицы: $\boxed{mat^{\langle\blacksquare\rangle}}$. На месте метки надо ввести номер того столбца, который требуется извлечь. Например, $mat^{\langle 1\rangle}=\begin{pmatrix}2\\4\\8.2\end{pmatrix}$ (в случае равенства `ORIGIN` нулю).

Стандартные функции `rows(M)` и `cols(M)` определяют соответственно число строк и столбцов матрицы `M`. Например, `rows(mat)=3` и `cols(mat)=2`.

Рис. 3.1. Панель **Матрица**

Задачи для самостоятельного решения

Т3.1. Следом квадратной матрицы называется сумма элементов, стоящих на главной диагонали. Доказать, что след матрицы AB равен следу матрицы BA.

Т3.2. Пусть $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$ и $C=AB=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}$, где A,B,C — квадратные матрицы порядка n, A_{11}, B_{11}, C_{11} — квадратные матрицы порядка k, A_{22}, B_{22}, C_{22} — квадратные матрицы порядка l ($k+l=n$), A_{12}, B_{12}, C_{12} — матрицы размера $k\times l$, A_{21}, B_{21}, C_{21} — матрицы размера $l\times k$. Доказать, что $C_{11}=A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}$, $C_{12}=A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}$, $C_{21}=A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}$, $C_{22}=A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}$.

Т3.3. Пусть A и B — квадратные матрицы одного порядка. Всегда ли выполняется равенство $AB=BA$?

Т3.4. Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB=BA$. Доказать, что квадратная матрица A перестановочна со всеми квадратными матрицами того же порядка, если и только если $A=kE$, где k — некоторое число.

Т3.5. Пусть $\vec{x}\in R^m$, $\vec{y}\in R^n$, A — матрица размера $m\times n$. Доказать, что $[\vec{x}A\cdot\vec{y}]=[\vec{x}\cdot\vec{y}A^{\mathrm{T}}]$.