

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \dots + X_n\delta_{1n} = 0$$

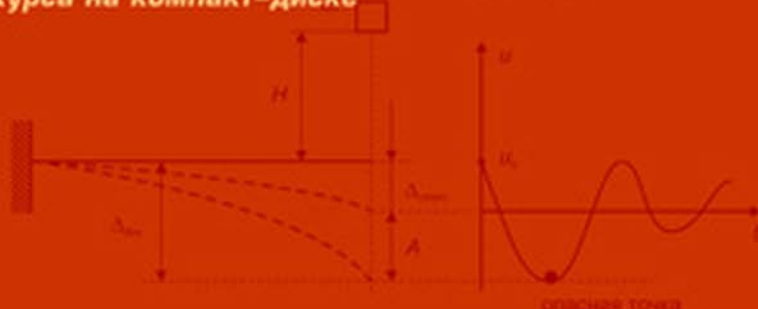
$$X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \dots + X_n\delta_{2n} = 0$$

$$X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \dots + X_n\delta_{nn} = 0$$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ НА БАЗЕ **MATHCAD**

given-fin

- *Полный объем теоретических сведений*
- *Практические расчеты*
- *Решение сложных задач в Mathcad*
- *40 универсальных программ по всем разделам курса на компакт-диске*



Е. Г. Макаров

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ НА БАЗЕ **MATHCAD**

Рекомендовано учебно-методическим объединением
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по группе направлений подготовки бакалавров
и магистров 550000 — «Технические науки»
и дипломированных специалистов 650000 — «Техника и технологии»
по дисциплине «Сопроотивление материалов»

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2004

УДК 681.3.06(0.75.8)
ББК 32.973.26-018.2я73
М15

Макаров Е. Г.

М15 Сопротивление материалов на базе Mathcad. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 512 с.: ил.

ISBN 5-94157-498-3

Курс сопротивления материалов дополнен сведениями о физике и механике хрупкого и пластического разрушения материалов. Углубленно рассматриваются расчеты в упругопластической области, усталость материалов, динамические расчеты. В каждой главе приводится решение сложных задач в пакете Mathcad. Все расчетные программы позволяют решить целый класс задач, проанализировать результаты расчета, выбрать оптимальный вариант. К книге прилагается компакт-диск с 40 универсальными программами по всем разделам курса сопротивления материалов, предназначенными для самостоятельной работы студентов.

*Для студентов и преподавателей технических вузов,
инженеров и научных работников*

УДК 681.3.06(0.75.8)
ББК 32.973.26-018.2я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зам. главного редактора	<i>Людмила Еремеевская</i>
Зав. редакцией	<i>Григорий Добин</i>
Редактор	<i>Алексей Семенов</i>
Компьютерная верстка	<i>Ольги Сергиенко</i>
Корректор	<i>Зинаида Дмитриева</i>
Дизайн обложки	<i>Игоря Цырульникова</i>
Зав. производством	<i>Николай Тверских</i>

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 22.09.04.

Формат 70×100^{1/16}. Печать офсетная. Усл. печ. л. 41,28.

Тираж 3000 экз. Заказ №

"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02 от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

Содержание

Предисловие	10
Особенности курса сопротивления материалов.....	10
Особенности решения задач в Mathcad.....	12
Глава 1. Основные понятия.....	15
1.1. Реальный объект и расчетная схема	15
1.2. Тела, рассматриваемые в сопротивлении материалов.....	16
1.3. Силы внешние и внутренние	17
1.4. Определение внутренних усилий методом сечений.....	17
1.5. Напряжения.....	21
1.6. Условия эквивалентности напряжений и внутренних усилий.....	22
1.7. Деформации.....	23
1.7.1. Типы деформаций.....	24
1.8. Потенциальная энергия упругой деформации.....	25
1.9. Гипотезы и допущения в сопротивлении материалов	27
1.10. Условия прочности	30
1.11. Виды опор, используемые в схемах сопротивления материалов	31
1.12. Статически определимые и статически неопределимые системы	32
1.13. Цели и задачи сопротивления материалов.....	34
1.14. Неучитываемые факторы.....	35
1.14.1. Концентрация напряжений.....	36
1.14.2. Изменение механических свойств материала	37
1.14.3. Вероятность выхода из строя	38
1.14.4. Принцип Сен-Венана.....	38
Глава 2. Геометрические характеристики поперечных сечений	40
2.1. Статические моменты площади сечений	40
2.1.1. Свойства статических моментов площади сечения.....	41
2.1.2. Определение положения центра тяжести	42
2.2. Моменты инерции сечений	44
2.2.1. Свойства моментов инерции	44
2.2.2. Моменты инерции простейших фигур	45
2.2.3. Моменты инерции относительно параллельных осей.....	48

2.2.4. Моменты инерции относительно повернутых осей.....	49
2.2.5. Главные оси и главные моменты инерции	51
2.2.6. Радиус инерции сечения.....	52
2.3. Примеры расчета геометрических характеристик сечений	52
2.3.1. Расчет геометрических характеристик сечения произвольной формы	53
2.3.2. Расчет геометрических характеристик составного сечения	57
Глава 3. Определение внутренних усилий.....	61
3.1. Растяжение-сжатие	62
3.2. Кручение	66
3.3. Изгиб	69
3.4. Дифференциальные зависимости внутренних усилий от распределенной нагрузки	77
3.4.1. Растяжение-сжатие	77
3.4.2. Кручение	78
3.4.3. Изгиб.....	78
3.4.4. Следствия из дифференциальных зависимостей.....	79
Глава 4. Растяжение-сжатие.....	83
4.1. Внутренние усилия и напряжения.....	83
4.2. Деформации.....	84
4.3. Закон Гука	85
4.4. Потенциальная энергия упругой деформации.....	87
4.5. Напряжения на наклонных площадках	88
4.5.1. Закон парности касательных напряжений	89
4.6. Понятие о главных напряжениях.....	90
4.7. Примеры решения задач на растяжение-сжатие	91
4.7.1. Расчет одного стержня	91
4.7.2. Расчет статически неопределимой шарнирно-стержневой системы	98
Глава 5. Механические характеристики материалов	104
5.1. Признаки хрупкого и пластического разрушения материалов	105
5.2. Диаграмма деформирования мягкой стали	106
5.2.1. Характеристики прочности.....	106
5.2.2. Характеристики пластичности	110
5.2.3. Работа разрушения при разрыве	111
5.2.4. Диаграммы деформирования других материалов	112
5.3. Испытание материалов на сжатие.....	113
5.4. Допускаемые напряжения.....	115
5.5. Диаграммы условных и истинных напряжений	116
5.5.1. Построение диаграммы истинных напряжений	119
5.5.2. Аппроксимация диаграммы деформирования	123
Глава 6. Сдвиг и кручение.....	127
6.1. Сдвиг	127
6.2. Расчет простейших соединений	130
6.2.1. Расчет тяги	131
6.2.2. Расчет штифта (заклепки).....	132

6.2.3. Расчет сварного соединения.....	133
6.2.4. Пример расчета простейших соединений	134
6.3. Кручение стержней круглого поперечного сечения.....	136
6.3.1. Касательные напряжения и угол закручивания.....	137
6.3.2. Потенциальная энергия при кручении стержня.....	142
6.4. Связь между крутящим моментом, мощностью и скоростью вращения вала....	144
6.5. Кручение стержней некруглого поперечного сечения.....	145
6.6. Примеры расчета стержней на кручение.....	147
Глава 7. Плоский поперечный изгиб.....	153
7.1. Нормальные напряжения при изгибе балки.....	154
7.1.1. Условие прочности при изгибе.....	158
7.1.2. Рациональная форма поперечного сечения.....	160
7.2. Касательные напряжения при изгибе.....	164
7.2.1. Распределение касательных напряжений в сечениях различной формы	166
7.2.2. Проверка прочности по касательным напряжениям.....	170
7.3. Потенциальная энергия упругой деформации при изгибе.....	172
7.4. Перемещения при изгибе.....	173
7.4.1. Непосредственное интегрирование уравнения упругой линии балки	174
7.4.2. Метод начальных параметров.....	175
7.5. Пример расчета балки на изгиб	178
7.5.1. Определение внутренних усилий.....	178
7.5.2. Определение напряжений.....	183
7.5.3. Определение перемещений балки	185
7.6. Изгиб кривых брусьев	189
7.6.1. Нормальные напряжения в кривых брусьях	189
7.6.2. Внутренние усилия в кривых брусьях.....	191
7.7. Расчет балок на упругом основании.....	193
Глава 8. Учет пластических деформаций.....	200
8.1. Связь напряжений и деформаций.....	200
8.2. Учет пластических деформаций при растяжении-сжатии.....	201
8.3. Учет упругопластических деформаций при изгибе	204
8.4. Учет пластических деформаций при кручении	213
8.5. Расчеты по предельной нагрузке.....	221
8.6. Понятие о приспособляемости конструкций	230
Глава 9. Основы напряженно-деформированного состояния	232
9.1. Деформации.....	232
9.2. Напряжения.....	233
9.3. Виды напряженного состояния.....	236
9.4. Плоское напряженное состояние.....	237
9.4.1. Прямая задача.....	238
9.4.2. Обратная задача.....	241
9.5. Связь напряжений и деформаций. Обобщенный закон Гука.....	244
9.6. Гипотезы прочности и пластичности	246
9.7. Условие прочности при плоском напряженном состоянии.....	253

Глава 10. Сложное сопротивление	255
10.1. Внутренние усилия при сложном сопротивлении.....	255
10.1.1. Построение эпюр внутренних усилий	256
10.2. Напряжения.....	259
10.2.1. Гипотезы.....	259
10.2.2. Нормальные напряжения.....	261
10.2.3. Касательные напряжения.....	262
10.2.4. Условие прочности	262
10.3. Расчет на прочность при сложном сопротивлении.....	263
10.3.1. Стержень произвольного сечения	263
10.3.2. Прямоугольное сечение	264
10.3.3. Круглое или кольцевое сечение.....	266
10.4. Частные случаи сложного сопротивления.....	267
10.5. Пример расчета стержня при сложном сопротивлении.....	268
Глава 11. Энергетический метод расчета упругих систем	278
11.1. Интеграл Мора	279
11.2. Примеры определения перемещений статически определимых систем	285
11.2.1. Определение перемещений балок при изгибе	285
11.2.2. Определение перемещений пространственной стержневой системы	289
11.3. Метод сил.....	292
11.3.1. Степень статической неопределимости	292
11.3.2. Перемещение от единичной силы (коэффициент податливости)	293
11.3.3. Канонические уравнения метода сил.....	295
11.3.4. Учет монтажных и температурных напряжений	298
11.3.5. Учет симметрии в методе сил.....	299
11.3.6. Проверка правильности решения системы	301
11.3.7. Порядок решения статически неопределимой задачи методом сил.....	301
11.4. Примеры раскрытия статической неопределимости методом сил	302
11.4.1. Раскрытие статической неопределимости плоской рамы.....	302
11.4.2. Расчет пространственной статически неопределимой рамы	309
11.4.3. Определение перемещений систем из нескольких элементов	317
Глава 12. Устойчивость сжатых стержней	323
12.1. Определение критической силы. Формула Эйлера	325
12.2. Определение критической силы при других видах закрепления.....	327
12.3. Критические напряжения	328
12.4. Расчет сжатых стержней на устойчивость.....	329
12.4.1. Условие устойчивости стержня.....	329
12.4.2. Рекомендации к расчету на устойчивость	331
12.4.3. Пример расчета стержня на устойчивость.....	332
12.5. Энергетический метод определения критической силы.....	335
12.5.1. Вывод формулы Рэлея.....	335
12.5.2. Примеры определения критической силы энергетическим методом.....	338
12.6. Продольно-поперечный изгиб.....	343
12.6.1. Уравнение упругой линии стержня	343
12.6.2. Примеры расчета балок на продольно-поперечный изгиб.....	344

Глава 13. Расчет тонкостенных оболочек.....	349
13.1. Безмоментная теория тонкостенных оболочек.....	349
13.1.1. Гипотезы и допущения	349
13.1.2. Формула Лапласа.....	351
13.1.3. Частные случаи тонкостенных оболочек.....	354
13.1.4. Расчет на прочность	356
13.2. Расчет распорного кольца.....	356
13.3. Деформация трубы под давлением.....	358
13.4. Краевой эффект.....	358
13.5. Пример расчета тонкостенной оболочки	362
Глава 14. Динамика упругих систем	368
14.1. Учет сил инерции при движении тела.....	369
14.2. Колебания упругой системы.....	370
14.2.1. Уравнение движения системы с одной степенью свободы	371
14.2.2. Свободные затухающие колебания.....	373
14.2.3. Опытное определение коэффициента затухания колебаний.....	375
14.3. Определение собственной частоты системы с одной степенью свободы.....	376
14.3.1. Собственная частота системы без учета ее массы.....	376
14.3.2. Собственная частота системы с учетом ее массы	377
14.3.3. Собственная частота при крутильных колебаниях	379
14.3.4. Замечания к расчету собственных частот колебаний	379
14.4. Ударная нагрузка.....	381
14.4.1. Вертикальный удар	381
14.4.2. Горизонтальный удар.....	383
14.4.3. Крутящий удар	384
14.4.4. Замечания к расчетам на ударную нагрузку.....	385
14.5. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы.....	386
14.5.1. Импульс силы.....	386
14.5.2. Произвольная нагрузка	387
14.5.3. Критическая скорость вращения вала.....	388
14.6. Примеры динамического расчета	389
14.6.1. Расчет балок на удар и колебания.....	389
14.6.2. Расчет сложной системы на удар и устойчивость.....	399
Глава 15. Усталость материалов.....	405
15.1. Механизм усталостного разрушения.....	405
15.2. Характеристики цикла нагружения.....	407
15.3. Диаграммы усталостной прочности	410
15.3.1. Усталостная кривая.....	410
15.3.2. Диаграмма предельных амплитуд	414
15.4. Суммирование повреждений при нестационарной нагрузке	415
15.5. Факторы, влияющие на предел выносливости	418
15.5.1. Концентрация напряжений.....	418
15.5.2. Размеры детали.....	420
15.5.3. Состояние поверхности.....	421

15.5.4. Влияние коррозии.....	423
15.5.5. Влияние температуры.....	423
15.6. Предел выносливости детали.....	424
15.7. Расчет на усталостную прочность.....	425
15.8. Примеры расчетов на усталостную прочность.....	427
15.8.1. Статистическая обработка результатов эксперимента.....	427
15.8.2. Приближенное построение диаграмм усталостной прочности.....	429
15.8.3. Определение размеров детали.....	431
15.8.4. Расчет долговечности детали при нестационарном нагружении.....	435
15.9. Понятие о малоцикловой усталости.....	439
Глава 16. Природа разрушения твердых тел.....	442
16.1. Природа упругой деформации.....	442
16.2. Теоретическая прочность твердых тел.....	443
16.3. Реальная прочность. Роль дефектов структуры.....	445
16.4. Виды дислокаций.....	445
16.5. Размножение дислокаций.....	448
16.6. Механизмы упрочнения.....	449
16.6.1. Упрочнение за счет уменьшения размеров зерен.....	449
16.6.2. Упрочнение легированием твердых растворов.....	450
16.6.3. Упрочнение за счет выделения дисперсных частиц при старении.....	450
16.7. Механизм больших пластических деформаций.....	451
16.7.1. Механизмы образования трещин.....	452
16.8. Механизмы роста трещин.....	452
16.9. Механизмы пластического разрушения.....	453
16.10. Механизм хрупкого разрушения.....	453
Глава 17. Факторы, влияющие на прочность и разрушение материалов.....	455
17.1. Скорость деформации.....	455
17.2. Температура эксплуатации.....	456
17.3. Переход от пластического разрушения к хрупкому.....	457
17.3.1. Критическая температура хрупкости как критерий общего запаса вязкости.....	459
17.4. Напряженное состояние.....	459
17.5. Остаточные напряжения.....	461
Глава 18. Линейная механика разрушения тел с трещинами.....	464
18.1. Основные гипотезы.....	464
18.2. Критерии трещиностойкости.....	469
18.2.1. Силовой критерий трещиностойкости.....	469
18.3. Живучесть конструкций.....	472
Глава 19. Рациональное и оптимальное проектирование.....	477
19.1. Выбор рациональной конструкции.....	477
19.2. Выбор критериев оптимизации.....	479
19.3. Примеры поиска оптимальных решений.....	481
19.3.1. Расчет кронштейна.....	481

19.3.2. Расчет сферической крышки.....	484
19.3.3. Подбор нагрузок по перемещениям балки.....	486
19.3.4. Поиск оптимальных размеров сечения балки	491
Приложение 1. Самостоятельная работа с программами	493
Приложение 2. Описание компакт-диска	502
Список литературы.....	507
Предметный указатель	509

Предисловие

При проектировании любой машины или конструкции необходимо обеспечить ее работоспособность и надежность в течение всего срока эксплуатации. Безотказная работа конструкции, в первую очередь, гарантируется ее прочностью и жесткостью.

Подготовка инженера по вопросам прочности конструкций обеспечивается целым рядом дисциплин, таких как механика деформированного твердого тела, теория упругости, теория пластичности, реология, динамика и устойчивость машин и сооружений, строительная механика. Поскольку ни один серьезный расчет в настоящее время не обходится без использования компьютера, численные методы решения задач динамики и прочности рассматриваются в курсе вычислительной механики.

Особенности курса сопротивления материалов

Сопротивление материалов — своего рода азбука прочности. Здесь рассматриваются основные понятия, такие как напряжения, деформации, перемещения и др., которые необходимы для изучения последующих дисциплин прочностного цикла.

В сопротивлении материалов вводится большое количество упрощающих расчет гипотез и допущений, что позволяет получить и использовать в расчетах простые инженерные формулы. При этом неизбежно уменьшается точность расчетов и уменьшается круг решаемых задач.

Формулы сопротивления материалов, как правило, используются на стадии эскизного проектирования для подбора основных размеров конструкции. При подготовке серийного производства необходимы уточненные расчеты с ис-

пользованием метода конечных элементов и экспериментальная доводка изделия на испытательных стендах.

Содержание книги соответствует программе Министерства образования России.

В течение 40 лет я преподаю курс сопротивления материалов и ряд дисциплин прочностного цикла в БГТУ-Военмех Санкт-Петербурга.

В большинстве разделов книги я постарался учесть современные взгляды на решение прочностных задач.

В углубленной постановке рассмотрены вопросы учета пластических деформаций. Использование системы Mathcad позволяет получать простые решения сложных (при решении вручную) задач теории пластичности.

Особое внимание обращается в книге на характер разрушения материалов (хрупкий или вязкий). Внезапный переход материала из пластического состояния в хрупкое ведет к аварии, часто с катастрофическими последствиями.

С позиций теории колебаний решаются в книге вопросы динамического воздействия сил на конструкцию.

С точки зрения практических расчетов рассмотрены вопросы усталости материалов и механики разрушения тел с трещинами.

Определенное внимание уделено вопросам рационального и оптимального проектирования конструкций. Если рациональному выбору конструкции учит весь курс сопротивления материалов, то оптимальное проектирование основано на использовании математических методов поиска экстремума функции.

Освоение "азбуки прочности" требует решения большого количества простых примеров, чтобы понять и запомнить основные принципы решения прочностных задач. Решив определенное количество задач вручную, можно приступать к решению сложных задач с использованием компьютерных методов расчета.

В данной книге почти не рассматриваются простые примеры, ввиду ограниченного объема книги. Для решения таких задач можно использовать другие учебники и пособия [1–3], [11], [13–15].

Каждый пример этой книги представляет собой программу для решения определенного класса задач и позволяет, задавая диапазоны изменения различных параметров, анализировать результаты расчета, способствуя выбору рациональной и даже оптимальной конструкции.

Приведенные программы могут использоваться при подготовке студенческих расчетных работ по сопротивлению материалов. Некоторые возможности изменения программ в процессе самостоятельной работы с ними приведены в *приложении 1* к книге.

Но главное приложение — это компакт-диск со всеми программами, который позволяет сразу использовать программы в расчетах. Кроме того, предложенные программы служат своего рода электронными кубиками, из которых можно собирать другие программы.

Приведенные в этой и моей предыдущей книге "Инженерные расчеты в Mathcad" [6] примеры показывают, что при использовании Mathcad в сопротивлении материалов практически нет нерешаемых задач.

Особенности решения задач в Mathcad

Использование компьютера при решении прочностных задач позволяет избежать сложных рутинных вычислений и сосредоточиться на анализе результатов расчетов, выборе оптимальных параметров.

Выбор Mathcad в качестве средства решения задач объясняется его простотой и наглядностью. Ведь все математические выражения в Mathcad выглядят так же, как в книге или тетради.

Большое количество встроенных функций, наличие численного и символьного процессоров позволяет решать задачи как численно, так и аналитически. Наличие графического и текстового редакторов дают возможность готовить технические документы непосредственно в оболочке Mathcad.

В некоторых разделах при выводе формул сопротивления материалов используется символьный процессор Mathcad для оценки выражений, вычисления интегралов и производных, решения уравнений в символьном виде. Однако проделать весь вывод какой-либо формулы в Mathcad, как правило, не удастся. Когда человек выводит формулу вручную, он, глядя на вид выражения, размышляет, как бы его преобразовать в более удобный вид. Mathcad размышлять не умеет. Он вычисляет по заранее разработанному алгоритму, в котором невозможно предусмотреть все возможные варианты преобразований. Для каждого расчета алгоритм надо разрабатывать самому. Чаще всего овчинка не стоит выделки.

Главное достоинство Mathcad — простота и удобство вычислений.

Этому принципу должны быть подчинены все вычисления в Mathcad. Если вручную выполнить вычисления быстрее и проще, чем в Mathcad, значит нечего и связываться с Mathcad. Именно так и обстоит дело с символьными вычислениями. Составить программу символьного вывода формулы конечно можно, но зачастую очень сложно. Вручную это делается гораздо быстрее.

А вот для оценки выражений, вычисления интегралов, производных, пределов функций, решения уравнений в символьном виде очень даже удобно использовать Mathcad.

Что касается численных вычислений, то здесь Mathcad успешно справляется с поставленной задачей. Однако, на мой взгляд, в системе Mathcad имеется много недоработок, ограничивающих применение системы в инженерной практике. Это ограничения при использовании размерностей в расчетах, при решении дифференциальных уравнений, при анализе экспериментальных данных. Совершенно недооценен создателями системы Mathcad раздел программирования, находящийся в зачаточном состоянии. Но даже в таком виде с использованием Mathcad можно запрограммировать задачу любой сложности [6].

Совет

Рекомендую приобрести мою книгу "Инженерные расчеты в Mathcad", которая поможет вам освоить Mathcad, а также содержит большое количество примеров решения инженерных задач в Mathcad. Вставляйте готовые фрагменты примеров в свои расчеты и подправляйте их соответственно условиям вашей задачи.

Все примеры, имеющиеся в той книге, размещены в Интернете на сайте издательства "Питер" www.piter.com. Загрузите их на свой компьютер и используйте в работе.

Хочу порекомендовать читателям книги — привыкайте к особому стилю компьютерных вычислений.

Практически все студенты (а я ежегодно обучаю сопротивлению материалов и работе в Mathcad около сотни студентов) в Mathcad считают так же, как вручную на микрокалькуляторах. Каждое слагаемое, каждый интеграл вычисляют отдельно.

Составляйте расчетные программы в общем виде, позволяющем решать целый класс подобных задач, изменяя исходные данные и параметры функций.

Используйте в работе векторные, матричные обозначения, знаки суммирования и произведения. Посмотрите, как компактно и зачастую элегантно выглядят расчеты в этой книге.

Усвойте основные принципы работы с Mathcad и совершенствуйте их дальше сами.

Чтобы решать задачи в Mathcad не надо быть большим специалистом. Достаточно изучить основы и иметь под рукой большой набор шаблонов для различных вычислений. Такими шаблонами являются программы, помещенные на компакт-диск, прилагаемый к этой книге, и размещенные в Интернете файлы к моей книге "Инженерные расчеты в Mathcad" [6].

Все программы, приведенные в этой книге, изготовлены в версии Mathcad 11, но сохранены в версии Mathcad 2000. Это позволяет открывать документы в любой версии от 2000 и выше.

Благодарности

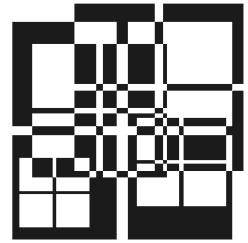
Особую благодарность выражаю своим студентам Михаилу Ковалеву, Дмитрию Толяренко и Олегу Чирикову за большую помощь в работе над книгой.

Об авторе

Макаров Евгений Георгиевич, доцент БГТУ-Военмех Санкт-Петербурга.

Email: emakarov@inbox.ru.

ГЛАВА 1



Основные понятия

В этой главе рассматриваются понятия, являющиеся общими для всех (или большинства) разделов сопротивления материалов.

1.1. Реальный объект и расчетная схема

Сопротивление материалов не рассматривает реальные объекты со всеми их индивидуальными особенностями. Оно изучает расчетные схемы и типовые методы расчета. Задача расчетчика выбрать расчетную схему, наиболее близко подходящую к реальному объекту. Удачно выбранная расчетная схема даст результаты расчета, близкие к реальным. При неудачном выборе — результат далек от истины.

В качестве примера рассмотрим мостовой кран, установленный в пролете цеха (рис. 1.1, а). Различные элементы конструкции испытывают разные нагрузки и рассчитывать на прочность их надо отдельно.

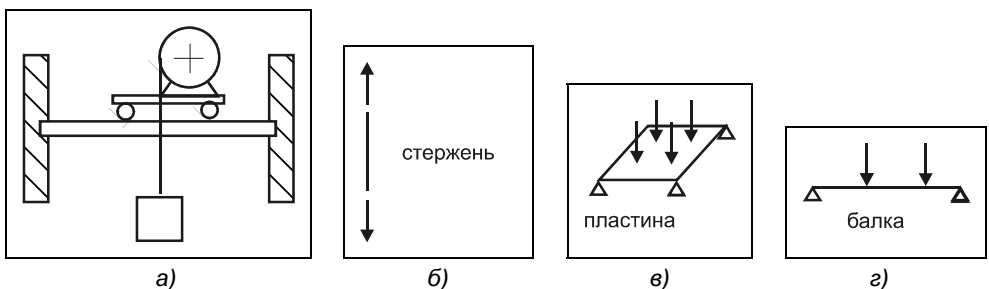


Рис. 1.1. Реальный объект и расчетная схема

На тросе висит груз, который растягивает его, поэтому первой расчетной схемой логично взять стержень (трос), нагруженный растягивающей силой

(рис. 1.1, б). Через трос нагрузка передается на барабан лебедки, далее на ось, подшипниковые опоры, зубчатые колеса и т. д.

Фактически каждую деталь лебедки необходимо рассматривать как отдельную расчетную схему. Лебедка установлена на раме, покрытой листом металла. Этот лист можно рассчитать как пластину, нагруженную в четырех точках крепления болтов (рис. 1.1, в). Колеса тележки мостового крана передают нагрузку на рельсы, которые можно рассматривать как балки на двух опорах (рис. 1.1, г).

Точность расчета зависит от выбора расчетной схемы. Например, рельсы можно рассматривать как балку, просто положенную на опоры, либо как балку, заделанную в кирпичную стену, либо приваренную к другой металлической конструкции. Результаты расчета при этом будут различными.

1.2. Тела, рассматриваемые в сопротивлении материалов

В процессе схематизации конструкции элементы реального тела заменяются их упрощенными моделями. Перечислим основные объекты, рассматриваемые в сопротивлении материалов (рис. 1.2).

1. Брус — тело, у которого один из размеров много больше двух других (длинное, тонкое, в общем случае криволинейное тело).
2. Стержень — прямолинейный брус.
3. Балка — стержень, работающий на изгиб.

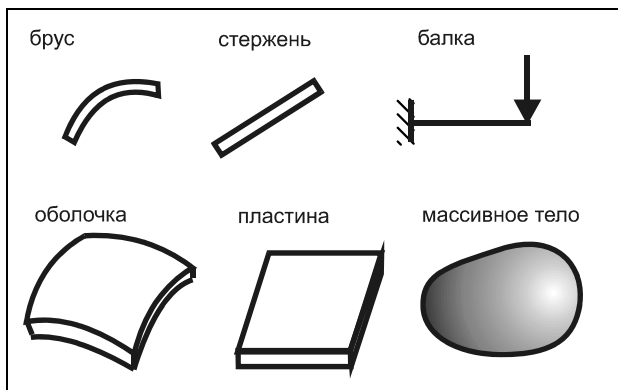


Рис. 1.2. Основные объекты в сопротивлении материалов

4. Оболочка — тело, у которого один из размеров много меньше двух других.
5. Пластина — частный случай оболочки, у которой срединная поверхность — плоскость.
6. Массивное тело.

1.3. Силы внешние и внутренние

Внешняя сила — это мера взаимодействия между телами. В задачах сопротивления материалов внешние силы считаются заданными. К внешним силам относятся также опорные реакции.

Внешние силы делятся на *объемные* и *поверхностные*. *Объемные* силы приложены к каждой частице тела по всему его объему. Примером объемных сил являются силы веса и силы инерции.

Поверхностные силы делятся на *сосредоточенные* и *распределенные*. *Сосредоточенными* считаются силы, приложенные к малой поверхности, размеры которой малы по сравнению с размерами тела, например, на схеме мостового крана (см. рис. 1.1) вес поднимаемого груза передается на рельсы через колеса тележки. При расчете балки на прочность размер зоны контакта колес с балкой мал по сравнению с длиной балки и нагрузку можно считать сосредоточенной. Однако при расчете напряжений вблизи зоны контакта нагрузку следует считать распределенной. К сосредоточенным нагрузкам относят не только сосредоточенные силы, но и пары сил, примером которых можно считать нагрузку, создаваемую гаечным ключом при закручивании гайки.

Распределенные нагрузки бывают распределенными по длине и по площади. В результате действия внешних сил в теле возникают *внутренние* силы. *Внутренняя сила* — мера взаимодействия между частицами одного тела.

Все внешние нагрузки можно разделить на *статические* и *динамические*.

Статическими считаются нагрузки, в процессе приложения которых возникающие силы инерции малы и ими можно пренебречь. В противном случае нагрузки считаются *динамическими*.

1.4. Определение внутренних усилий методом сечений

Внутренние силы являются самоуравновешенными. Поэтому они не видны на схеме и не влияют на условия равновесия тела. Определяются внутренние силы методом сечений.

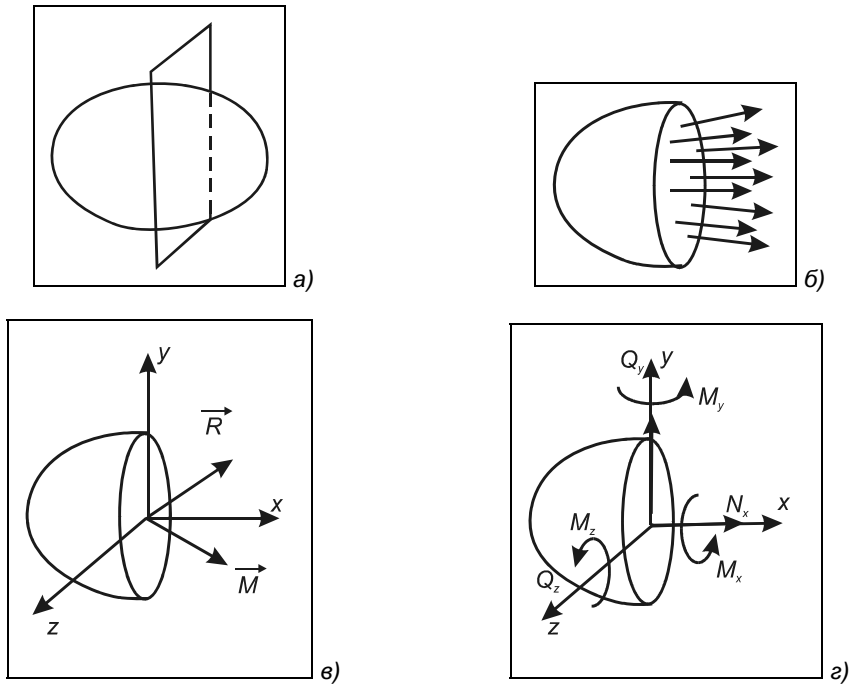


Рис. 1.3. Определение внутренних усилий методом сечений

Мысленно рассекаем тело произвольным сечением (рис. 1.3, а), отбрасываем одну часть тела и рассматриваем равновесие оставшейся части. Если бы не было внутренних сил, оставшаяся неуравновешенная часть тела начала бы двигаться под действием внешних сил. Поскольку сечение мысленное и тело находится в равновесии, действие отброшенной части тела заменяем внутренними силами (рис. 1.3, б), приложенными к каждой частице тела. Из теоретической механики известно, что любая система сил может быть приведена в любую точку пространства в виде главного вектора сил \vec{R} и главного момента сил \vec{M} (рис. 1.3, в). Модуль и направление этих векторов неизвестны. Удобнее всего определять проекции этих векторов на оси x , y , z , где ось x — нормаль к сечению, y и z — оси, лежащие в плоскости сечения. Начало координат находится в центре тяжести сечения (рис. 1.3, г).

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} N_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} \quad \vec{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Проекции векторов R и M носят следующие названия:

- N_x — продольное усилие;
- Q_y и Q_z — поперечные силы соответственно вдоль осей y и z ;
- $M_x = M_k$ — крутящий момент;
- M_y и M_z — изгибающие моменты соответственно вокруг осей y и z .

В общем случае определения внутренних усилий имеем 6 неизвестных, которые можно определить из шести уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow N_x \\ \sum F_y = 0 \rightarrow Q_y \\ \sum F_z = 0 \rightarrow Q_z \\ \sum M(F)_x = 0 \rightarrow M_x \\ \sum M(F)_y = 0 \rightarrow M_y \\ \sum M(F)_z = 0 \rightarrow M_z \end{cases}$$

Решая систему из шести уравнений с шестью неизвестными, определяем все внутренние усилия.

Пример

Для заданного стержня (рис. 1.4, а) найти внутренние усилия и построить их эпюры.

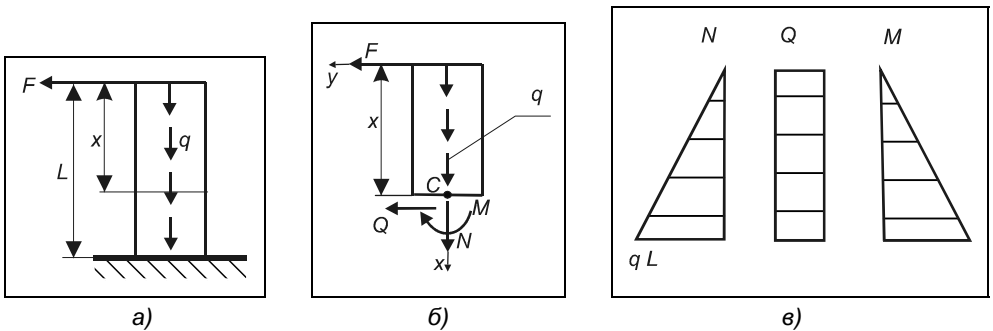


Рис. 1.4. Определение внутренних усилий в стержне

Отсекаем нижнюю часть стержня (рис. 1.4, б). Действие отброшенной части заменяем внутренними усилиями. В плоской задаче из шести внутренних

усилий остается только 3 (продольное усилие N , поперечная сила Q и изгибающий момент M). Для их определения составляем 3 уравнения равновесия

$$\begin{cases} \sum F_x = N + qx = 0 \\ \sum F_y = Q + F = 0 \\ \sum M(F)_c = Fx - M = 0 \end{cases}, \text{ откуда находим } \begin{cases} N = -q \cdot x \\ Q = -F \\ M = F \cdot x \end{cases}.$$

Сумма моментов вычислена относительно центра тяжести сечения C .

Знак плюс свидетельствует о том, что направление внутреннего усилия на схеме показано верно. Знак минус говорит о том, что истинное направление усилия противоположно выбранному.

Далее строим *эпюры внутренних усилий* (графики их изменения вдоль оси стержня) (рис. 1.4, в).

Обычно эпюры внутренних усилий строятся с целью выбора опасного сечения и определения усилий в нем для последующего расчета на прочность.

На практике чаще всего поступают иначе. Поскольку метод называется "метод мысленных сечений", отсеченную часть тела отбрасывают мысленно и рассматривают сумму сил или моментов всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения. На схеме же нужно показать положение рассматриваемого сечения и его текущую координату. От выбора начала координат зависит вид выражения, но не зависит результат выражения.

Общее правило определения любого внутреннего усилия:

N_x, Q_y, Q_z равняются алгебраической сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, соответственно на оси x, y или z .

M_x, M_y, M_z равняются алгебраической сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, соответственно относительно осей x, y или z , проходящих через центр тяжести выбранного сечения.

При использовании приведенного правила необходимо принять правило знаков для внутренних усилий, т. к. в данном случае вектор на схеме не показан и его направление пока не известно.

Правило знаков для внутренних усилий будет введено позднее при рассмотрении деформаций растяжения, изгиба, кручения.

1.5. Напряжения

Напряжением называется интенсивность действия внутренних сил в точке тела или, проще говоря, внутреннее усилие, приходящееся на единицу площади.

Рассечем тело произвольным сечением (рис. 1.5). Выделим малую площадку ΔA . Внутреннее усилие, действующее на нее, обозначим ΔR . Полное среднее напряжение, на этой площадке $\bar{p} = \overline{\Delta R} / \Delta A$. Найдем предел этого отношения при $\Delta A \rightarrow 0$. Это и будет напряжение в точке тела $\bar{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta R}}{\Delta A}$.

Чтобы задать вектор полного напряжения в точке, надо задать его модуль и направление в пространстве или задать его проекции на оси координат. Спроектируем вектор ΔR на оси x , y , z , из которых ось x направлена вдоль нормали к сечению, а оси y и z лежат в плоскости сече-

ния $\overline{\Delta R} = \begin{bmatrix} \Delta N_x \\ \Delta Q_y \\ \Delta Q_z \end{bmatrix}$. Найдем проекции полного напряжения на оси x , y и z .

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N_x}{\Delta A} = \frac{dN_x}{dA} \text{ — нормальное напряжение;}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_y}{\Delta A} = \frac{dQ_y}{dA} \text{ — касательное напряжение вдоль оси } y; \quad (1.1)$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_z}{\Delta A} = \frac{dQ_z}{dA} \text{ — касательное напряжение вдоль оси } z.$$

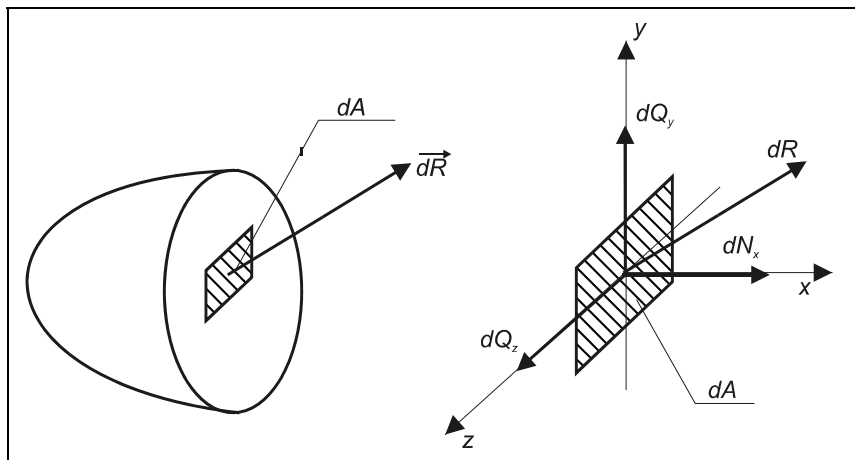


Рис. 1.5. Определение напряжений в точке A

В обозначении касательного напряжения первый индекс указывает нормаль к площадке, второй индекс — направление касательного напряжения.

1.6. Условия эквивалентности напряжений и внутренних усилий

В произвольном сечении тела вблизи произвольной точки выделим элементарную площадку dA (рис. 1.6) и покажем напряжения, действующие в выбранной точке.

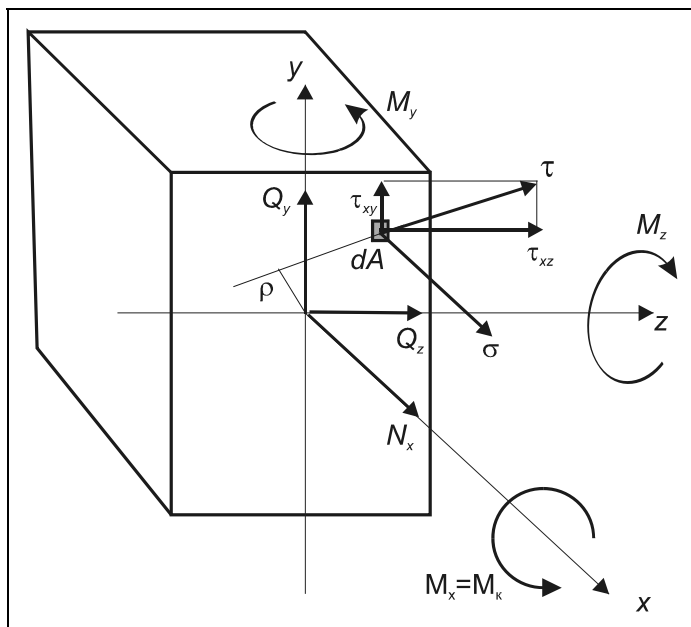


Рис. 1.6. Внутренние усилия и напряжения в точке тела

Пусть закон изменения напряжений по сечению известен. Найдем внутренние усилия в выбранном сечении:

- продольное усилие на площадке dA : $dN = \sigma_x dA$;
- поперечная сила вдоль оси y : $dQ_y = \tau_{xy} dA$;
- поперечная сила вдоль оси z : $dQ_{xz} = \tau_{xz} dA$.

Полные продольное усилие и поперечные силы для всего поперечного сечения есть интеграл от приведенных выражений

$$\begin{aligned} N_x &= \int_A \sigma_x dA \\ Q_y &= \int_A \tau_{xy} dA \\ Q_z &= \int_A \tau_{xz} dA \end{aligned} \quad (1.2)$$

Обратите внимание, что к такому же результату приводит интегрирование выражений (1.1).

Найдем выражения для изгибающих и крутящего моментов.

Элементарные моменты вокруг осей x , y , z

$$\begin{aligned} dM_z &= \sigma_x dA \cdot y \\ dM_y &= \sigma_x dA \cdot z \\ dM_x &= \tau_{xz} dA \cdot y - \tau_{xy} dA \cdot z \end{aligned}$$

Выражение для крутящего момента становится проще, если предварительно найти суммарное касательное напряжение $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$. Тогда

$$dM_k = dM_x = \tau dA \cdot \rho.$$

Интегрируя элементарные моменты, получаем

$$\begin{aligned} M_z &= \int_A \sigma_x y \cdot dA \\ M_y &= \int_A \sigma_x z \cdot dA \\ M_k &= M_x = \int_A \tau \rho \cdot dA \end{aligned} \quad (1.3)$$

Выражения (1.2) и (1.3) представляют собой условия эквивалентности напряжений и внутренних усилий. Каждое внутреннее усилие есть суммарный результат действия напряжений по всему поперечному сечению тела.

1.7. Деформации

Следует различать *деформации* и *перемещения*.

Перемещение — изменение положения точки в пространстве.

Деформация — изменение формы и размеров тела.

В отдельных случаях их величины могут совпадать, например, при растяжении стержня, но в общем случае — это разные вещи.

Деформации могут быть *угловыми* и *линейными* (рис. 1.7).

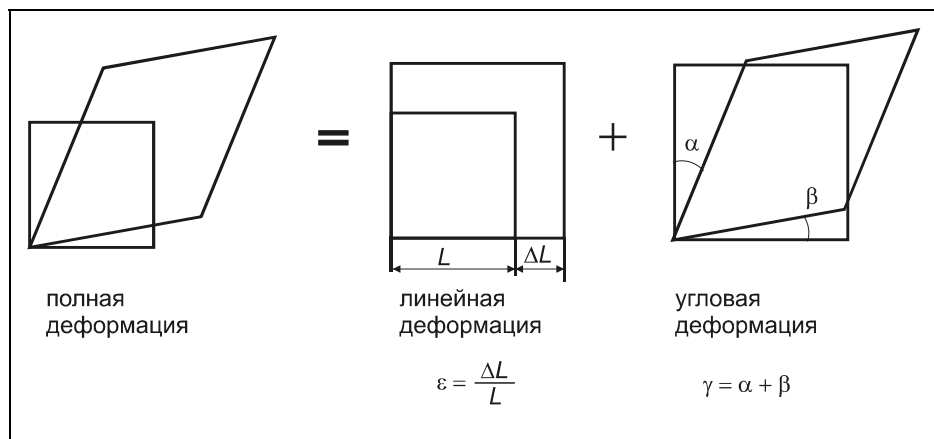


Рис. 1.7. Линейная и угловая деформация

Линейная деформация характеризует изменение размеров тела. Она бывает абсолютная ΔL и относительная $\varepsilon = \Delta L/L$. Использование относительной деформации предпочтительно, т. к. она не зависит от размеров тела.

Угловая деформация характеризует изменение формы тела и чаще всего называется углом сдвига.

Угол сдвига — это изменение первоначально прямого угла $\gamma = \alpha + \beta$.

Полная деформация — это сумма линейной и угловой деформаций.

Деформации делятся на *упругие* и *пластические (остаточные)*.

Упругими называются деформации, исчезающие после снятия вызвавших их сил.

Пластическими или *остаточными* называются деформации, остающиеся после снятия вызвавших их сил.

Полная деформация равна сумме упругих и пластических деформаций.

1.7.1. Типы деформаций

В зависимости от приложенных к телу нагрузок выделяют несколько типов деформаций, различающихся законом распределения напряжений по сечению тела.

1. *Растяжение-сжатие* — в поперечном сечении действует только одно внутреннее усилие, не равное нулю — продольное усилие.
2. *Сдвиг* — в поперечном сечении действует только поперечная сила.
3. *Кручение* — в поперечном сечении действует только крутящий момент.
4. *Изгиб* — в поперечном сечении действуют изгибающий момент и поперечная сила.
5. *Сложное сопротивление* — одновременное действие нескольких типов простых деформаций — растяжения-сжатия, кручения, изгиба.

Для каждого из указанных типов деформации в последующих главах будут выведены свои формулы для расчета на прочность.

1.8. Потенциальная энергия упругой деформации

Целью прочностных расчетов обычно является определение перемещений, деформаций и напряжений в конструкции. Сопротивление материалов рассматривает сравнительно простые расчетные схемы, для которых указанные величины определяются по простым инженерным формулам. Для сложных реальных конструкций в общем случае расчет сводится к решению системы из 15 дифференциальных уравнений и не имеет аналитического решения. Приближенное численное решение такой системы также сопряжено с большими трудностями.

Для решения сложных задач успешно применяется энергетический подход, в основе которого лежит определение работы внешних и внутренних сил и определение потенциальной энергии упругой деформации. Для успешного овладения энергетическими методами расчета в курсе "сопротивление материалов" для каждого вида деформации рассчитывается потенциальная энергия упругой деформации.

Рассмотрим общий подход к определению потенциальной энергии упругой деформации. Для ее расчета используется известный принцип механики:

Начало возможных перемещений

Если тело находится в равновесии, то сумма работ внешних и внутренних сил, действующих на тело, равна нулю на любых возможных перемещениях.

Возможными считаются малые перемещения, согласованные со связями.

Заметим, что реальные перемещения конструкции всегда возможные.

$$\delta A^{\text{внеш}} + \delta A^{\text{внутр}} = 0,$$

где $\delta A^{\text{внеш}}$ и $\delta A^{\text{внутр}}$ — вариации (малые приращения) работы внешних и внутренних сил.

При упругой деформации знак вариации можно опустить, тогда

$$A^{\text{внеш}} + A^{\text{внутр}} = 0,$$

где $A^{\text{внеш}}$ и $A^{\text{внутр}}$ — работа внешних и внутренних сил.

Работа внешних сил затрачивается, в основном, на совершение упругой и пластической деформации. При этом работа пластической деформации обычно во много раз больше упругой деформации. Работа пластической деформации переходит в тепло, а работа упругой деформации — в потенциальную энергию, которая постоянно находится в теле (как сжатая пружина), готовая при определенных условиях, например при разрыве тела, высвободиться, что при большом запасе энергии может привести к катастрофическим последствиям.

Далее рассматриваем лишь упругую деформацию тела. Тогда

$$A^{\text{внеш}} = -A^{\text{внутр}} = \Pi,$$

где Π — потенциальная энергия упругой деформации, которая всегда положительная.

В случае действия одной силы F работа внешних сил равна произведению силы на перемещение Δ под действием силы, если $F = \text{Const}$, и равна площади диаграммы деформирования тела в координатах $F-\Delta$ в противном случае, как известно из курса математики (технические приложения определенного интеграла). При упругой деформации перемещение пропорционально нагрузке и на графике изображается в виде прямой линии (рис 1.8). Тогда работа силы F

$$A^{\text{внеш}} = \int_0^{\Delta} F \cdot d\Delta$$

равна площади, ограниченной графиком подынтегральной функции и осью абсцисс, т. е. площади заштрихованного треугольника

$$A^{\text{внеш}} = \frac{1}{2} F \cdot \Delta.$$

В случае действия системы сил $A^{\text{внеш}}$ равна сумме работ каждой силы в отдельности

$$A^{\text{внеш}} = \frac{1}{2} \sum F \cdot \Delta.$$

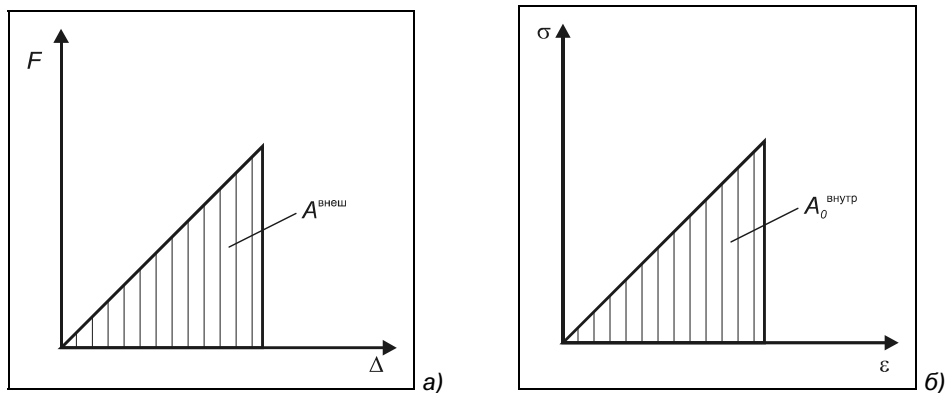


Рис. 1.8. Работа внешних (а) и внутренних (б) сил

Мерой внутренних сил в теле являются напряжения. Потенциальную энергию упругой деформации, численно равную работе внутренних сил, можно связать с напряжениями, записав в виде

$$\Pi = \int_V \Pi_0 dV,$$

где Π_0 — удельная потенциальная энергия упругой деформации, накопленная в единице объема тела V .

При растяжении $\Pi_0 = \frac{\sigma \varepsilon}{2}$ (равна площади треугольника на диаграмме деформирования в координатах $\sigma - \varepsilon$ (см. рис. 1.8, б)).

Величину Π_0 в дальнейшем для отдельных видов деформации выразим через напряжения и деформации. Используя начало возможных перемещений, получим связь между нагрузками, перемещениями, напряжениями и деформациями, которая и ляжет в основу энергетических методов расчета, включая метод конечных элементов, самый мощный метод расчета напряженно-деформированного состояния конструкций.

1.9. Гипотезы и допущения в сопротивлении материалов

Для расчета напряжений и деформаций в произвольном теле надо составить систему из 15 дифференциальных уравнений и решить ее. В общем случае

такая задача неразрешима. Чтобы получить решение задачи, необходимо принять упрощающие гипотезы, которые сужают круг решаемых задач, но позволяют использовать для решения простые инженерные формулы. Перечислим основные гипотезы, используемые в курсе сопротивления материалов.

□ *Гипотеза сплошности, однородности, изотропности материалов.*

Пренебрегая атомарной структурой материала, считаем его сплошным, однородным, изотропным.

Материал считается:

- *сплошным*, если в теле нет разрывов;
- *однородным*, если его свойства во всех точках одинаковы;
- *изотропным*, если его свойства во всех направлениях одинаковы.

□ *Справедлив закон Гука.*

Перемещения точек тела пропорциональны приложенным нагрузкам. Деформации пропорциональны напряжениям.

□ *Гипотеза малости деформаций.*

Для всякого твердого тела деформации малы по сравнению с размерами тела. При составлении уравнений равновесия тела изменением размеров тела вследствие деформации можно пренебречь.

□ *Принцип независимости действия сил.*

Результат действия на тело системы сил не зависит от порядка приложения нагрузок и равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности.

Рассмотрим балку, нагруженную тремя нагрузками F , M и q (рис. 1.9). Суммарный прогиб конца балки (точки A) будет равен сумме прогибов балки от действия отдельно приложенных сил F , M и q .

$$\Delta_A = \Delta_A^F + \Delta_A^M + \Delta_A^q.$$

Следующие две гипотезы относятся только к *длинным и тонким стержням*:

□ *Гипотеза плоских сечений.*

Сечения плоские до деформации остаются плоскими после деформации.

Эту гипотезу можно рассматривать как экспериментальный факт, наблюдаемый, например, при нанесении прямоугольной сетки на резиновый стержень (рис. 1.10). При изгибе такого стержня продольные линии искривляются, в то время, как поперечные линии остаются прямыми.

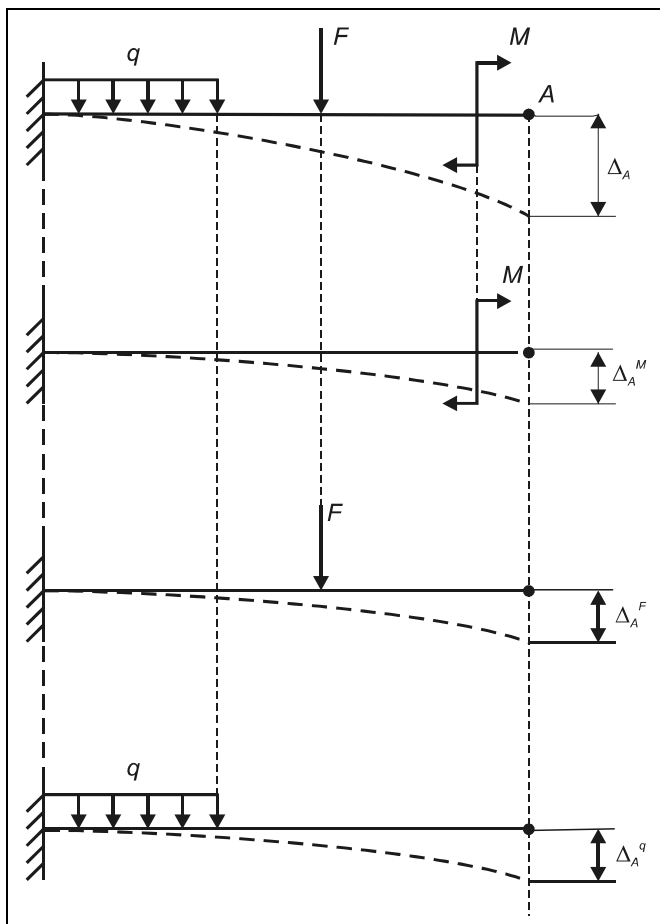


Рис. 1.9. Принцип независимости действия сил

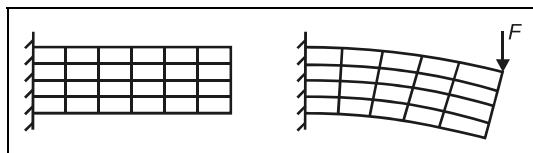


Рис. 1.10. Гипотеза плоских сечений

□ *Гипотеза отсутствия боковых давлений.*

Волокна друг на друга не давят.

Гипотеза предполагает, что нормальные напряжения σ действуют только вдоль продольной оси стержня и не действуют в поперечных направлении-