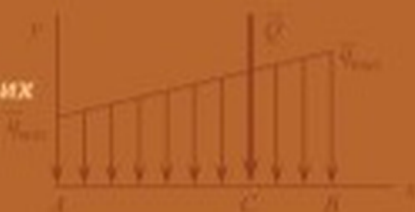


ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА НА БАЗЕ **MATHCAD** ПРАКТИКУМ

- Кинематика, статика, динамика – основные понятия и определения
- Большое количество специально подобранных задач
- Методология решения задач средствами пакета *Mathcad*
- Основы работы в *Mathcad*
- Возможность использования при дневной, вечерней и заочной формах обучения студентами высших и средних специальных заведений



$$I_{\xi} = \sum_k m_k d_k^2$$

$$a_m(t) := \text{vector5}(R_M(t)_1, R_M(t)_2, a_M(t)_1, a_M(t)_2, M_a)$$

Виталий Бертяев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА НА БАЗЕ **MATHCAD ПРАКТИКУМ**

*Допущено учебно-методическим объединением вузов
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по машиностроительным специальностям*

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2005

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2
Б52

Бертяев В. Д.

Б52 Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 752 с.: ил.

ISBN 5-94157-625-0

В пособии рассматриваются решения большого количества разнообразных задач основных разделов курса (кинематики, статики, динамики) с помощью Mathcad. Основные теоретические сведения по каждому разделу даны конспективно, в качестве справочного материала. Особое внимание уделено применению Mathcad для анализа поведения механических систем на основе полученного решения. Приводятся тексты рабочих документов Mathcad с решениями задач. Изложены основы работы с Mathcad; представлен его интерфейс, вычислительные и аналитические возможности, подробно рассмотрены вопросы графического отображения получаемых с помощью Mathcad решений; дано введение в программирование на языке Mathcad; представлены часто используемые в механике твердого тела функции, операторы и объекты.

Для студентов и преподавателей высших и средних технических учебных заведений всех форм обучения

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2

Группа подготовки издания:

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зам. главного редактора	<i>Людмила Еремеевская</i>
Зав. редакцией	<i>Григорий Добин</i>
Редактор	<i>Леонид Кочин</i>
Компьютерная верстка	<i>Екатерины Трубниковой</i>
Корректор	<i>Татьяна Кошелева</i>
Дизайн обложки	<i>Игоря Цырульникова</i>
Зав. производством	<i>Николай Тверских</i>

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 31.08.05.

Формат 70×100¹/₁₆. Печать офсетная. Усл. печ. л. 60,63.

Тираж 3000 экз. Заказ №

"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.02.953 Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-625-0

© Бертяев В. Д., 2005

© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2005

Содержание

Введение	1
ЧАСТЬ I. КИНЕМАТИКА	5
Глава 1. Кинематика точки	9
Основные понятия и определения	9
Пример 1.1. Определение кинематических характеристик точки по заданному закону движения	12
Пример 1.2. Нахождение закона движения и кинематических характеристик точки колеса, катящегося без скольжения	24
Пример 1.3. Нахождение закона движения точки шатуна кривошипно-шатунного механизма	34
Пример 1.4. Нахождение закона движения точки камня в кулисном механизме	38
Глава 2. Кинематика твердого тела	45
Основные понятия и определения	45
Простейшие движения	45
Сферическое движение	47
Пример 2.1. Определение кинематических характеристик поступательного движения	49
Пример 2.2. Определение кинематических характеристик вращательного движения ...	53
Пример 2.3. Определение кинематических характеристик сферического движения	60
Глава 3. Сложное движение точки	75
Основные понятия и определения	75
Пример 3.1. Определение кинематических характеристик точек шатуна механизма с качающимся цилиндром	77
Пример 3.2. Определение кинематических характеристик точек камня кулисного механизма	89
Глава 4. Плоскопараллельное движение твердого тела	105
Общие положения	105
Пример 4.1. Определение кинематических характеристик звеньев и точек кривошипно-шатунного механизма	107

Пример 4.2. Определение кинематических характеристик звеньев и точек шарнирного четырехзвенника.....	114
Пример 4.3. Определение кинематических характеристик звеньев и точек механизма с качающимся цилиндром	124
Пример 4.4. Определение кинематических характеристик точек колеса планетарного механизма.....	137
Глава 5. Кинематика плоских механизмов	143
Постановка задачи.....	143
Уравнения геометрических связей.....	144
Определение законов движения звеньев механизма	148
Аналитический метод.....	148
Численный метод.....	152
Определение угловых и линейных скоростей и ускорений звеньев	155
Определение скоростей и ускорений узловых точек	159
Численная реализация поставленной задачи	159
ЧАСТЬ II. СТАТИКА	179
Глава 6. Основные понятия и определения статики.....	183
Аксиомы статики.....	183
Аксиома о равновесии системы двух сил.....	183
Аксиома о добавлении (отбрасывании) уравновешенной системы сил	183
Следствие	183
Аксиома параллелограмма сил.....	184
Аксиома о равенстве сил действия и противодействия	185
Аксиома затвердевания.....	185
Аксиома освобожденности от связей	186
Примеры связей и их реакций	186
Сложение и разложение сил. Проекция силы на ось	187
Момент силы. Пара сил	189
Момент силы относительно точки на плоскости.....	189
Векторное представление момента силы	190
Пара сил. Момент пары	190
Произвольная пространственная система сил	192
Основная теорема статики.....	192
Теорема о моменте равнодействующей (теорема Вариньона).....	192
Условия равновесия произвольной системы сил.....	192
Различные типы систем сил и условия их равновесия	193
Дополнительные формы условий равновесия плоской системы сил.....	194
Распределенные силы	194
Частные случаи распределенных нагрузок	196
Распределенная нагрузка, направленная под углом α	196
Статически определимые и статически неопределимые задачи	196
Глава 7. Равновесие одного тела	199
Пример 7.1. Равновесие произвольной плоской системы сил.....	199
Пример 7.2. Равновесие пространственной системы сил	210

Глава 8. Равновесие системы тел	227
Пример 8.1. Равновесие двух тел	228
Пример 8.2. Равновесие трех тел	238
Глава 9. Расчет плоских ферм	259
Пример 9.1.	260
ЧАСТЬ III. ДИНАМИКА	275
Глава 10. Динамика материальной точки	279
Динамика свободной материальной точки	279
Законы механики Галилея-Ньютона	279
1. Закон инерции	279
2. Основной закон динамики точки	280
3. Закон о равенстве сил действия и противодействия	280
4. Принцип суперпозиции (закон независимого действия сил)	281
Дифференциальные уравнения движения материальной точки	281
Классификация задач динамики	282
Первая основная задача динамики	282
Вторая основная задача динамики	282
Пример 10.1. Вертикальное движение материальной точки	283
Пример 10.2. Движение материальной точки, брошенной под углом к горизонту	297
Динамика несвободной материальной точки	315
Пример 10.3. Колебания математического маятника	318
Пример 10.4. Движение сферического маятника	324
Динамика относительного движения точки	330
Принцип относительности Галилея. Относительный покой	332
Сила веса и сила тяжести	332
Пример 10.5. Вертикальное движение точки относительно Земли	335
Пример 10.6. Маятник Фуко	341
Глава 11. Основы динамики механических систем	353
Основные понятия и определения	353
Связи и их классификация	353
Возможные (виртуальные) перемещения	354
Обобщенные координаты. Число степеней свободы системы	354
Центр масс	354
Моменты инерции твердых тел	355
Количество движения	356
Кинетический момент	357
Кинетическая энергия	358
Элементарный и полный импульс силы	359
Работа силы	359
Силовое поле, силовая функция, потенциальная энергия	360
Силы инерции. Главный вектор и главный момент сил инерции механической системы	361
Обобщенные силы	362
Введение в динамику механической системы	362
Дифференциальные уравнения движения механической системы	363

Общие теоремы динамики.....	364
Теорема о движении центра масс.....	364
Теорема об изменении количества движения.....	364
Теорема об изменении главного вектора кинетического момента.....	364
Теорема о кинетическом моменте в относительном движении по отношению к центру масс.....	365
Теорема об изменении кинетической энергии.....	365
Закон сохранения механической энергии для точки и системы.....	365
Принцип Даламбера.....	366
Принцип Лагранжа (принцип возможных перемещений).....	366
Общее уравнение динамики.....	367
Уравнения Лагранжа II рода.....	367
Глава 12. Динамика твердого тела.....	369
Дифференциальные уравнения движения твердых тел.....	369
Поступательное движение.....	369
Вращательное движение вокруг неподвижной оси.....	370
Нахождение реакций в подшипниках.....	370
Плоское движение.....	372
Пример 12.1. Колебания физического маятника.....	373
Пример 12.2. Экспериментальное определение центра масс и моментов инерции твердого тела.....	383
Пример 12.3. Динамика вращательного движения твердого тела.....	388
Пример 12.4. Динамика плоского движения твердого тела.....	399
Глава 13. Динамика плоских шарнирных механизмов.....	407
Постановка задачи Equation.....	407
Исследование движения механизма.....	409
Составление кинематических соотношений.....	409
Составление дифференциального уравнения движения механизма с помощью теоремы об изменении кинетической энергии.....	411
Численное решение дифференциального уравнения движения механизма.....	413
Нахождение реакций внешних и внутренних связей механизма.....	421
Элементы оптимизации работы плоских механизмов.....	427
Глава 14. Основы теории колебаний.....	433
Основные понятия и определения.....	433
Потенциальная энергия системы.....	435
Кинетическая энергия системы.....	436
Диссипативная функция Рэлея.....	436
Уравнение Лагранжа II рода.....	437
Свободные колебания системы.....	438
Затухающие колебания системы.....	439
Вынужденные колебания системы.....	441
Исследование вынужденных колебаний.....	445
Резонанс.....	445
Биения.....	447
Критерии и условия, используемые при исследовании колебательных движений механических систем.....	448

Коэффициент динамичности	449
Коэффициент передачи силы	452
Условия, обеспечивающие соответствие движений механических систем их математической модели	455
Приближенное решение	459
Исследование механической системы с одной степенью свободы	460
Определение закона движения механической системы	461
Определение реакций внешних и внутренних связей	465
Исследование механической системы	468
Результаты оптимизации	486
Анализ результатов оптимизации	490
ЧАСТЬ IV. ПРИЛОЖЕНИЯ	491
Приложение 1. ОСНОВЫ РАБОТЫ С ПАКЕТОМ MATHCAD	493
П1.1. Общая характеристика пакета Mathcad	493
П1.1.1. Системные требования к Mathcad 11	494
П1.1.2. Особенности версии Mathcad 11 Enterprise Edition	494
П1.2. Пользовательский интерфейс Mathcad	496
П1.2.1. Окно Mathcad	496
П1.2.2. Главное меню	497
П1.2.3. Панели инструментов	497
П1.2.4. Контекстное меню	500
П1.2.5. Настройка панелей инструментов	501
П1.3. Основы работы в Mathcad	502
П1.3.1. Средства редактирования	503
Визир	504
Текстовый курсор ввода	505
Математический маркер ввода (выделяющая рамка)	505
П1.3.2. Создание и редактирование выражений	507
Переменные и функции	508
Определение дискретного аргумента	511
Редактирование выражений и операторов	512
Форматирование выражений	514
П1.3.3. Ввод объектов	514
П1.3.4. Использование встроенных функций	517
П1.3.5. Работа с размерными величинами	518
П1.3.6. Работа с блоками документа	521
Выделение областей	522
Копирование, перемещение и удаление областей	523
Выравнивание областей	523
П1.4. Основы аналитических преобразований	524
П1.5. Работа с матрицами	535
П1.5.1. Ввод матриц и векторов	536
П1.5.2. Операции с векторами и матрицами	538
П1.5.3. Матричные функции	540
П1.5.4. Решение систем линейных алгебраических уравнений	541

П1.6. Построение графиков	542
П1.6.1. Двумерные (2D) графики	544
Форматирование 2D-графиков	549
П1.6.2. Трехмерные (3D) графики	553
Форматирование 3D-графиков	561
Управление изображением графика с помощью мыши	571
П1.6.3. Построение 3D-графиков с помощью специальных функций.....	571
П1.7. Решение нелинейных уравнений	574
П1.7.1. Уравнение с одним неизвестным	574
Пример.....	577
Пример 1 (Неудачный выбор начального приближения)	577
Пример 2 (Пример удачного выбора начального приближения)	578
Пример 3 (Использование метода замены переменной)	578
П1.7.2. Блок решения <i>Given</i> и системы нелинейных уравнений	580
Пример 1 (Неудачный выбор начального приближения)	582
Пример 2 (Метод замены переменной)	583
П1.8. Обыкновенные дифференциальные уравнения	585
П1.8.1. Блок <i>Given</i> для решения ОДУ.....	585
Решение задачи Коши.....	587
Решение краевой задачи	589
П1.8.2. Решение ОДУ с помощью специальных функций.....	592
Задача Коши.....	593
Краевая задача	599
П1.9. Основы программирования	602
П1.9.1. Примеры функций, используемых в механике	609
Дифференцирование и интегрирование векторов	609
П1.9.2. Функции для рисования векторов и символов.....	616
П1.10. Расширенные возможности Mathcad.....	623
П1.10.1. Создание анимационного клипа.....	623
П1.10.2. Элементы управления	626
Приложение 2.....	639
П2.1. Команды главного меню.....	639
Меню <i>File</i> (Файл)	639
Меню <i>Edit</i> (Правка):.....	640
Меню <i>View</i> (Вид)	641
Подменю <i>Toolbars</i> (Панели инструментов)	642
Меню <i>Insert</i> (Вставка).....	643
Подменю <i>Graph</i> (График).....	644
Подменю <i>Data</i> (Данные).....	645
Подменю <i>Control</i> (Элементы управления).....	646
Меню <i>Format</i> (Формат).....	646
Подменю <i>Graph</i> (Графика)	648
Подменю <i>Color</i> (Цвет).....	648
Подменю <i>Area</i> (Зона)	648
Подменю <i>Align regions...</i> (Выровнять области).....	649

Меню <i>Tools</i> (Сервис).....	649
Подменю <i>Animation</i> (Анимация)	650
Подменю <i>Calculate</i> (Вычисление).....	650
Подменю <i>Optimize</i> (Оптимизация)	651
Меню <i>Symbolic</i> (Символика):	651
Подменю <i>Evaluate</i> (Вычислить)	652
Подменю <i>Variable</i> (Переменная).....	652
Подменю <i>Matrix</i> (Матрица)	653
Подменю <i>Transform</i> (Преобразования).....	654
Меню <i>Window</i> (Окно).....	654
Меню <i>Help</i> (Справка).....	655
Подменю <i>E-Book</i> (Электронные книги).....	656
П2.2. Команды панелей инструментов	657
Панель <i>Standard</i> (Стандартная)	657
Панель <i>Formatting</i> (Форматирование)	659
Панель <i>Resources</i> (Центр ресурсов)	660
Панель <i>Controls</i> (Элементы управления)	661
Панель <i>Math</i> (Математика)	662
Панель <i>Calculator Toolbar</i> (Калькулятор)	663
Панель <i>Graph Toolbar</i> (Графики)	665
Панель <i>Matrix Toolbar</i> (Матрицы)	666
Панель <i>Evaluation</i> (Вычисления)	668
Панель <i>Calculus</i> (Выражения)	669
Панель <i>Boolean</i> (Булевы операторы)	671
Панель <i>Programming</i> (Программирование).....	672
Панель <i>Greek Symbols Toolbar</i> (Греческие символы)	675
Панель <i>Symbolic Keyword Toolbar</i> (Символьные операторы).....	675
Панель <i>Modifier</i> (Модифицировать)	678
П2.3. Клавиши управления курсором, встроенные переменные и операторы.....	679
Клавиши управления курсором.....	679
Встроенные переменные.....	681
Встроенные операторы	682
П2.4. Встроенные функции	688
Элементарные трансцендентные функции.....	689
Тригонометрические и обратные тригонометрические функции	689
Логарифмические и показательные функции	689
Гиперболические и обратные гиперболические функции	689
Цилиндрические функции	690
Специальные и гипергеометрические функции	691
Текстовые функции.....	692
Условные функции	692
Функции комплексных чисел.....	693
Геометрические функции	693
Функции усечения и округления и направления	694
Функции преобразования координат.....	694
Дискретные преобразования	694
Преобразования Фурье.....	694

Волновое преобразование	695
Векторные и матричные функции	695
Размер и диапазон значений массива	695
Сортировка элементов матриц и векторов	696
Специальные типы матриц	696
Специальные характеристики матриц	697
Формирование новых матриц из существующих	697
Собственные значения и собственные векторы	698
Разложения матриц	698
Решение системы линейных алгебраических уравнений	699
Корни функций	699
Решение уравнений и неравенств в блоке <i>Given</i>	700
Решение дифференциальных уравнений	701
Решение обыкновенных дифференциальных уравнений	701
Решение дифференциальных уравнений в частных производных	705
Функции обработки данных	706
Функции интерполяции	706
Функция предсказания	707
Функции регрессии	707
Функции сглаживания	710
Статистические оценки случайных совокупностей	710
Распределение вероятностей	711
Плотность, функции и квантили распределения вероятности	711
Случайные числа	712
Доступ к файлам	712
Символьные преобразования	713
П2.5. Сообщения об ошибках	714
Сообщения об ошибках в числовых вычислениях	714
Сообщения об ошибках в символьных вычислениях	733
Л и т е р а т у р а	735
П р е д м е т н ы й у к а з а т е л ь	737

Введение

Теоретическая механика является одной из важнейших физико-математических дисциплин, изучаемых не только в вузах, но и в средних специальных учебных заведениях. На основных законах теоретической механики базируются многие общепрофессиональные и теоретические дисциплины, такие как сопротивление материалов, теория машин и механизмов, детали машин, теория упругости, внешняя и внутренняя баллистика и т. д. Хорошее знание курса теоретической механики требует не только глубокого усвоения теории, но и умения грамотно поставить задачу, решить ее, проанализировать результаты и при необходимости выбрать оптимальный вариант решения.

Обширная литература по теоретической механике [2—4, 15, 16, 19—21, 24] помогает освоить теорию, а также постановку и методы решения типовых задач. Однако полученные знания и умения не освобождают от рутинных и трудоемких расчетов, за которыми может теряться смысл механических явлений и процессов. В существующей литературе не уделяется достаточного внимания математическому моделированию и анализу полученных решений. Между тем потребность в таких руководствах ощущается как студентами в процессе обучения, так и специалистами в их практической деятельности. Иными словами, нужно научить не только методам, но и анализу решения задач разной степени сложности таким образом, чтобы это решение не затмевало физику процессов и явлений.

В настоящее время развитие вычислительной техники приобрело лавинообразный характер, получили широкое распространение такие мощные пакеты математического моделирования, не требующие специальных знаний в программировании, как Maple, MATLAB, Mathcad и т. д. Облегчая решение сложных математических задач, такие системы позволяют снять психологический барьер в изучении механики и

математики, а также делают этот процесс интересным и более простым. Грамотное их применение в учебном процессе позволяет обеспечить повышение фундаментальности математического и технического образования.

Данную книгу следует рассматривать как введение к применению одной из самых распространенных математических систем — Mathcad — для решения задач разной степени сложности в курсе "Теоретическая механика". Использование Mathcad в теоретической механике позволяет анализировать поведение механических систем в соответствии с поставленной задачей, что дает возможность решать реальные инженерные задачи учащимися младших курсов, не знакомыми еще с численными методами и программированием.

Пакет Mathcad представляет собой эффективное средство для аналитических преобразований и численного решения инженерных и физических задач. Область его применения простирается от простейших вычислений до расчета сложных задач в различных отраслях знаний. С помощью Mathcad можно с успехом решать задачи механики абсолютно твердых и деформируемых тел. Пакет имеет чрезвычайно удобный математико-ориентированный интерфейс и прекрасные средства графики [1, 11—13, 26]. Наличие интеграции Mathcad с такими мощными системами автоматизации расчетов, как MATLAB и Excel делает его незаменимым инструментом в руках не только студента, но и инженера, занимающегося разработкой сложных систем.

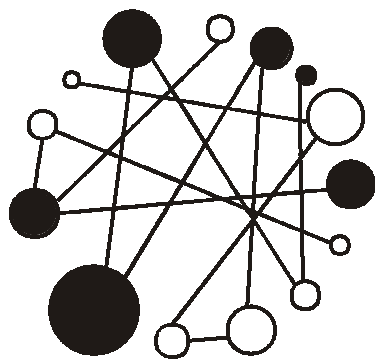
Данная книга продолжает серию справочных книг [6—9, 17, 21, 22, 23], посвященных современным средствам автоматизации математических расчетов и применению их в технических приложениях. Предполагается, что читатель либо изучает теоретическую механику, либо знаком с ней. Наиболее эффективным путем обучения искусству применения методов теоретической механики является не формальное заучивание правил и приемов, а показ их в действии. Поэтому в книге основное внимание уделено решению практических задач, специально подобранных для того, чтобы, с одной стороны, научить самостоятельно решать более сложные и математически трудоемкие задачи механики, а с другой — показать возможности системы Mathcad.

Книга состоит из трех частей (14 глав) и двух приложений. Первая, вторая и третья часть книги посвящены решению конкретных задач теоретической механики в соответствии с ее разделами (кинематика, статика и динамика). В каждом разделе после конспективного обзора теории указываются не только типы задач, решаемых с помощью

перечисленных теорем и положений, но и методы пакета Mathcad, позволяющие получить данное решение. Затем приводятся решения конкретных задач, причем часто сравниваются и оцениваются разные способы и методы их получения. В приложении 1 даны основные сведения о Mathcad, приемы работы с его математическим, графическим и текстовым редакторами. В отличие от существующего переводного описания системы Mathcad PLUS 6.0 [1] и других изданий [11—13, 26], данное приложение характеризуется ориентацией на англоязычную версию Mathcad 11, компактностью изложения, сокращенным описанием широко известных элементов интерфейса, изучением системы на конкретных примерах. Приложение 2 является кратким справочником по Mathcad 11, в котором приводится описание интерфейса, основных операторов и функций пакета, а также перевод сообщений об ошибках и способах их устранения. Изложенного материала достаточно для первоначального ознакомления с пакетом. Предварительных знаний о Mathcad не требуется.

Считаю своим долгом поблагодарить доцента кафедры теоретической механики Тульского государственного университета Л.А. Булатова, ознакомившегося с рукописью и сделавшего ряд ценных замечаний.

Все замечания и предложения по структуре, содержанию и стилю изложения книги автор с благодарностью примет по адресу vit@tiei.ru или tm@tsu.tula.ru.



ЧАСТЬ I

КИНЕМАТИКА

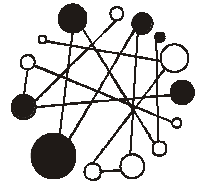
Кинематика изучает механическое движение материальных объектов с геометрической точки зрения. Механическим движением называется процесс непрерывного изменения положения тел (или их точек) в пространстве относительно друг друга.

Объектами изучения кинематики является материальная точка и абсолютно твердое тело. Тело, размерами которого можно пренебречь по условиям задачи, принимается за материальную точку. Абсолютно твердым телом называется система материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными в любой момент времени.

Положение точки или тела в пространстве определяется с помощью системы координат (системы отсчета), неизменно связанной с другим телом (телом отсчета). Система отсчета называется основной или "абсолютной", если в рассматриваемой задаче можно не учитывать движение этой системы.

При проектировании новой машины или прибора необходимо уметь создать такую кинематическую схему, в которой движения всех звеньев совершаются наиболее целесообразно. Для этого необходимо уметь определять кинематические характеристики движения точек: законы движения, траектории, скорости и ускорения. Без знания кинематики это сделать невозможно.

Глава 1



Кинематика точки

Основные понятия и определения

Положение точки определяется радиус-вектором (рис. 1.1):

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \equiv \overline{OM}(t).$$

Это уравнение движения точки в векторной форме.

Положение движущейся точки в каждый момент времени относительно выбранной системы отсчета может быть определено ее декартовыми координатами (рис. 1.1):

$$\vec{r}(t) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

или криволинейными координатами q_i , $i = \overline{1, 3}$ (рис. 1.3):

$$\vec{r}(t) = q_1(t) \vec{e}_1 + q_2(t) \vec{e}_2 + q_3(t) \vec{e}_3,$$

где $\vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$, а $h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}$ — коэффициенты

Ламе.

Непрерывная кривая, с точками которой в каждый момент времени совпадает движущаяся точка, называется траекторией. Уравнения движения точки в координатной форме представляют собой уравнения траектории в параметрическом виде. Если исключить из них параметр t , то получим уравнение траектории в виде пересечения двух поверхностей:

$$F_1(x, y, z) = 0, F_2(x, y, z) = 0.$$

При известном виде траектории движение точки удобно задать естественным способом (рис. 1.2). Для этого на траектории назначают начало отсчета, например точку O , направление отсчета и записывают зависимость ду-

говой координаты s от времени $\widehat{OM} = s(t)$. С траекторией точки можно связать естественный координатный базис с единичными векторами: касательной — $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}$, главной нормали — $\bar{n} = \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{\tau}}{ds}$ и бинормали — $\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}$.

Здесь ρ — радиус кривизны траектории.

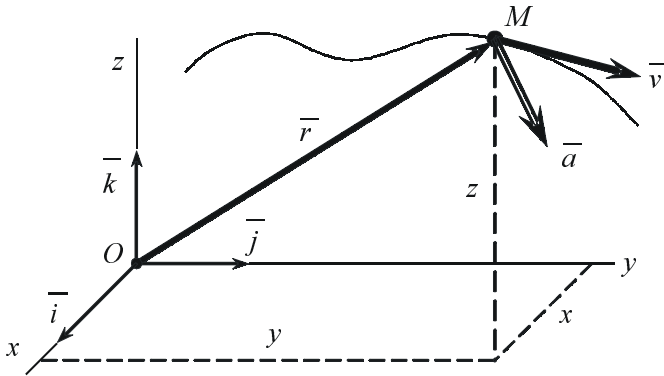


Рис. 1.1. Закон движения, скорость и ускорение точки в декартовых координатах

Скорость точки — векторная величина, которая направлена по касательной к траектории, характеризует быстроту изменения ее положения в пространстве и вычисляется как производная от радиус-вектора по времени:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x} \bar{i} + \dot{y} \bar{j} + \dot{z} \bar{k}.$$

Модуль и направляющие косинусы вектора скорости равны

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad \cos(\bar{v}, \bar{i}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\bar{v}, \bar{j}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\bar{v}, \bar{k}) = \frac{v_z}{v}.$$

При естественном способе задания движения точки ее скорость можно определить следующим образом:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{ds} \dot{s} = \dot{s} \bar{\tau} = v_\tau \bar{\tau},$$

где $v_\tau = \bar{v} \cdot \bar{\tau} = \dot{s}$ — проекция вектора скорости на касательную к траектории.

В криволинейных координатах вектор скорости имеет вид:

$$\bar{v}(t) = \dot{\bar{r}}(t) = h_1 \dot{q}_1 \bar{e}_1 + h_2 \dot{q}_2 \bar{e}_2 + h_3 \dot{q}_3 \bar{e}_3 = h_i \dot{q}_i \bar{e}_i,$$

где \dot{q}_i — обобщенная скорость точки.

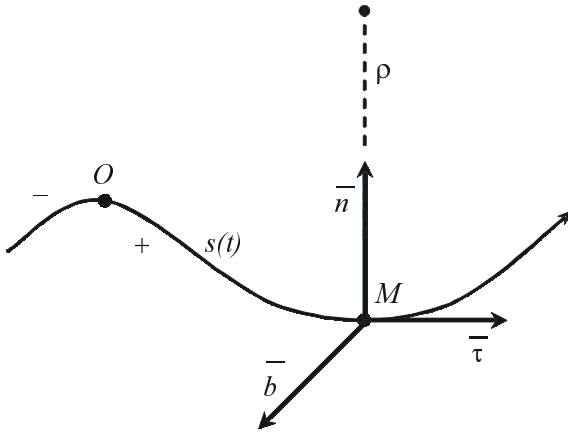


Рис. 1.2. Естественный координатный базис

В случае ортогональных криволинейных координат модуль скорости определяется выражением

$$v = \sqrt{(h_1 \dot{q}_1)^2 + (h_2 \dot{q}_2)^2 + (h_3 \dot{q}_3)^2}.$$

Векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости, называется ускорением и равна производной по времени от вектора скорости:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} = \ddot{x} \bar{i} + \ddot{y} \bar{j} + \ddot{z} \bar{k}.$$

Модуль вектора ускорения и его направляющие косинусы можно вычислить по формулам:

$$a = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad \cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{a_z}{a}.$$

При естественном способе задания движения точки ускорение определяется равенством

$$\bar{a} = \dot{v}_\tau \bar{\tau} + v_\tau \dot{\bar{\tau}} = \dot{v}_\tau \bar{\tau} + (v_\tau)^2 \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \dot{s} \bar{\tau} + \frac{v_\tau^2}{\rho} \bar{n} = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n},$$

где $a_\tau = \bar{a} \cdot \bar{\tau} = \dot{v}_\tau = \dot{s}$ — касательное и $a_n = \bar{a} \cdot \bar{n} = \frac{v_\tau^2}{\rho}$ — нормальное ускорения.

Так как $\bar{a}_\tau \perp \bar{a}_n$, модуль ускорения можно найти по теореме Пифагора

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Вектор ускорения точки лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости траектории.

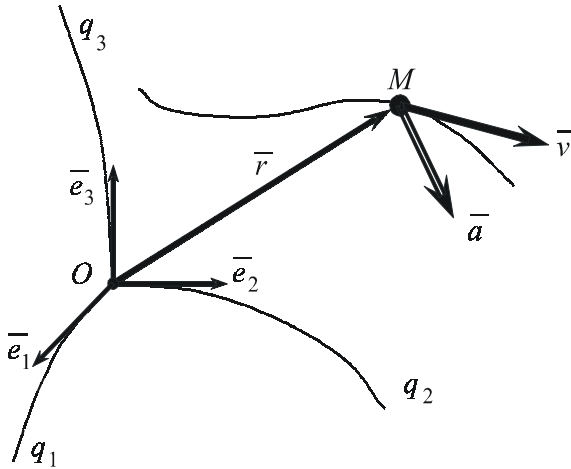


Рис. 1.3. Закон движения, скорость и ускорение точки в криволинейных координатах

В ортогональных криволинейных координатах вектор ускорения равен

$$\bar{a}(t) = \dot{\bar{v}}(t) = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3 = a_i \bar{e}_i,$$

где $a_i = \frac{1}{h_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right]$, $i = \overline{1, 3}$ — проекции ускорения точки, направленные по базисным ортогональным векторам, а $T = v^2/2$.

Пример 1.1. Определение кинематических характеристик точки по заданному закону движения

Точка M движется согласно уравнениям:

$$x(t) = 3 \cos(\omega t) \quad [\text{см}],$$

$$y(t) = 2 \cos(\omega t) \quad [\text{см}], \quad \omega = \pi \quad [\text{с}^{-1}].$$

Определить траекторию, скорость и ускорение точки M , в момент времени $T = 1/3$ с. Найти тангенциальную и нормальную составляющие, а также радиус кривизны траектории. Построить графики изменения кинематических характеристик точки.

Решение

Для определения траектории точки M , движущейся по заданному закону, исключим из уравнений движения время, для чего выразим тригонометрические функции времени, возведем каждое уравнение в квадрат и сложим почленно. В результате получим уравнение траектории, которая является эллипсом с полуосями $a = 3$ и $b = 2$:

$$\frac{x(t)}{3} = \cos(\omega t), \quad \frac{y(t)}{2} = \sin(\omega t), \quad \Rightarrow \quad \frac{x(t)^2}{3^2} + \frac{y(t)^2}{2^2} = 1.$$

Дальнейшее решение проведем с использованием стандартных методов Mathcad. На рис. 1.4 представлено окно программы, содержащее численное решение поставленной задачи.

Mathcad - [kin_01_01a]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U

Определим положение точки M в момент времени $t = T$.

$$x(T) \rightarrow \frac{3}{2} = 1.5 \quad y(T) \rightarrow 3^2 = 1.732$$

Найдем проекции вектора скорости точки, его модуль и направление относительно оси OX в произвольный момент времени, а также при значениях $t = T$.

$$v_x(t) := \frac{d}{dt} x(t) \quad v_y(t) := \frac{d}{dt} y(t)$$

$$v(t) := \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} \quad \alpha_v(t) := \frac{\text{angle}(v_x(t), v_y(t))}{\text{deg}}$$

$$v_x(t) \rightarrow -3 \cdot \sin(\pi \cdot t) \cdot \pi \quad v_y(t) \rightarrow 2 \cdot \cos(\pi \cdot t) \cdot \pi$$

$$v_x(T) \rightarrow \frac{-3}{2} \cdot 3^2 \cdot \pi = -8.162 \quad v_y(T) \rightarrow \pi = 3.142$$

$$v(t) \text{ simplify} \rightarrow \pi \cdot (9 - 5 \cdot \cos(\pi \cdot t)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Press F1 for help. AUTO NUM Page 1

Рис. 1.4. Окно Mathcad, содержащее численное решение задачи

Примечание

В Mathcad имеется возможность с помощью команды **Save as** (Сохранить как) сохранить решение в формате RTF (рис. 1.5), а затем вставить его в любой документ, в том числе и в рукопись этой книги. Однако размещение в книге большого объема неформатированного текста, содержащего внедренные объекты, неудобно по технологическим соображениям, поэтому в дальнейшем решения задач, снятые с экрана Mathcad, будут выделяться шрифтом Courier.

Найдем проекции вектора скорости точки, его модуль и направление относительно оси Ox в произвольный момент времени, а также при значении $t = T$.

$$v_x(t) := \frac{d}{dt}x(t) \quad \text{¶}$$

$$v_y(t) := \frac{d}{dt}y(t) \quad \text{¶}$$

$$v(t) := \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} \quad \text{¶}$$

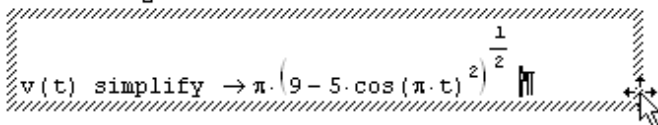
$$\alpha_v(t) := \frac{\text{angle}(v_x(t), v_y(t))}{\text{deg}} \quad \text{¶}$$

$$v_x(t) \rightarrow -3 \cdot \sin(\pi \cdot t) \cdot \pi \quad \text{¶}$$

$$v_y(t) \rightarrow 2 \cdot \cos(\pi \cdot t) \cdot \pi \quad \text{¶}$$

$$v_x(T) \rightarrow \frac{-3}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot \pi = -8.162 \quad \text{¶}$$

$$v_y(T) \rightarrow \pi = 3.142 \quad \text{¶}$$

$$v(t) \text{ simplify} \rightarrow \pi \cdot (9 - 5 \cdot \cos(\pi \cdot t))^{\frac{1}{2}} \quad \text{¶}$$


$$v(T) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 31^{\frac{1}{2}} \cdot \pi = 8.746 \quad \text{¶}$$

Рис. 1.5. Решение в формате RTF

Далее представлено численное решение поставленной задачи, снятое с экрана программы.

Введем исходные данные задачи.

$$T := \frac{1}{3}$$

$$\omega := \pi$$

$$x(t) := 3 \cos(\omega t)$$

$$y(t) := 2 \sin(\omega t)$$

Определим положение точки M в момент времени $t = T$.

$$x(T) \rightarrow \frac{3}{2} = 1.5$$

$$y(T) \rightarrow 3^{\frac{1}{2}} = 1.732$$

Найдем проекции вектора скорости точки, его модуль и направление относительно оси Ox в произвольный момент времени, а также при значении $t = T$.

Примечание

Звездочки справа от выражения означают, что режим оптимизации Mathcad включен и процедура вычисления данного выражения оптимизирована.

$$v_x(t) := \frac{d}{dt}x(t) \quad *$$

$$v_x(t) \rightarrow -3 \cdot \sin(\pi \cdot t) \cdot \pi$$

$$v_x(T) \rightarrow \frac{-3}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot \pi = -8.162$$

$$v_y(t) := \frac{d}{dt}y(t) \quad *$$

$$v_y(t) \rightarrow 2 \cdot \cos(\pi \cdot t) \cdot \pi$$

$$v_y(T) \rightarrow \pi = 3.142$$

$$v(t) := \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}$$

$$v(t) \text{ simplify} \rightarrow \pi \cdot \left(9 - 5 \cdot \cos(\pi \cdot t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v(T) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 31^{\frac{1}{2}} \cdot \pi = 8.746$$

$$\alpha_v(t) := \frac{\text{angle}(v_x(t), v_y(t))}{\text{deg}}$$

$$\alpha_v(T) \rightarrow \frac{-\text{atan}\left(\frac{2}{9} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) + \pi}{\text{deg}} = 158.948$$

Найдем проекции вектора ускорения точки, его модуль и направление относительно оси Ox в произвольный момент времени, а также при значении $t = T$.

$$a_x(t) := \frac{d^2}{dt^2}x(t) \quad *$$

$$a_x(t) \rightarrow -3 \cdot \cos(\pi \cdot t) \cdot \pi^2$$

$$a_x(T) \rightarrow \frac{-3}{2} \cdot \pi^2 = -14.804$$

$$a_y(t) := \frac{d^2}{dt^2}y(t) \quad *$$

$$a_y(t) \rightarrow -2 \cdot \sin(\pi \cdot t) \cdot \pi^2$$

$$a_y(T) \rightarrow -3^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^2 = -17.095$$

$$a(t) := \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2}$$

$$a(t) \text{ simplify} \rightarrow \pi^2 \cdot \left(5 \cdot \cos(\pi \cdot t)^2 + 4\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$a(T) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 21^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^2 = 22.614$$

$$\alpha_a(t) := \frac{\text{angle}(a_x(t), a_y(t))}{\text{deg}} \quad \alpha_a(T) \rightarrow \frac{\text{atan}\left(\frac{2}{3} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) - \pi}{\text{deg}} = -130.893$$

Вычисляем тангенциальное ускорение точки в произвольный момент времени, а также при значении $t=T$.

$$a_\tau(t) := \frac{v_x(t) \cdot a_x(t) + v_y(t) \cdot a_y(t)}{v(t)}$$

$$a_\tau(t) \text{ simplify} \rightarrow 5 \cdot \sin(\pi \cdot t) \cdot \pi^2 \cdot \frac{\cos(\pi \cdot t)}{\left(9 - 5 \cdot \cos(\pi \cdot t)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$a_\tau(T) \text{ simplify} \rightarrow \frac{5}{62} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^2 \cdot 31^{\frac{1}{2}} = 7.676$$

Вычисляем нормальное ускорение точки в произвольный момент времени, а также при значении $t=T$.

$$a_n(t) := \sqrt{a(t)^2 - a_\tau(t)^2} \quad a_n(t) \text{ simplify} \rightarrow 6 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{-1}{-9 + 5 \cdot \cos(\pi \cdot t)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$a_n(T) \text{ simplify} \rightarrow \frac{12}{31} \cdot 31^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^2 = 21.272$$

Вычисляем угол между направлениями вектора ускорения и главной нормали к траектории.

$$\beta(t) := \frac{\text{angle}(a_n(t), a_\tau(t))}{\text{deg}} \quad \beta(T) = 19.842$$

Вычисляем радиус кривизны траектории в произвольный момент времени, а также при значении $t=T$.

$$\rho(t) := \frac{v(t)^2}{a_n(t)} \quad \rho(t) \text{ simplify} \rightarrow \frac{-1}{6} \cdot \frac{-9 + 5 \cdot \cos(\pi \cdot t)}{\left(\frac{-1}{-9 + 5 \cdot \cos(\pi \cdot t)}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\rho(T) \text{ simplify} \rightarrow \frac{31}{48} \cdot 31^{\frac{1}{2}} = 3.596$$

Построим графики зависимостей найденных величин от времени в интервале $0 \leq t \leq 2$ [с] (рис. 1.6—1.9).

Зададим t в виде дискретной переменной:

$$t := 0, 0.01.. 2$$

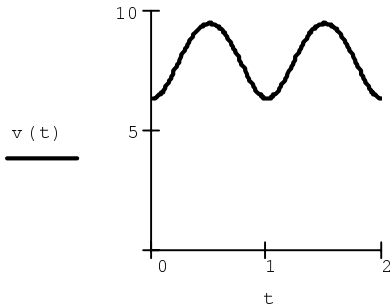


Рис. 1.6. График зависимости модуля скорости от времени t

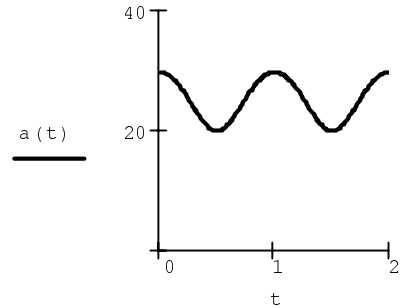


Рис. 1.7. График зависимости модуля ускорения от времени t

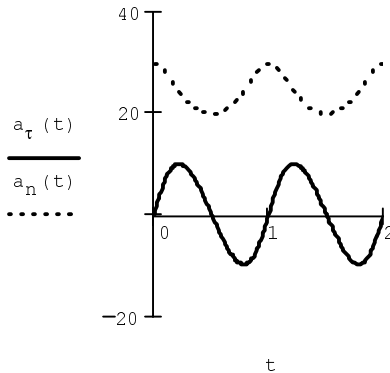


Рис. 1.8. График зависимости тангенциального и нормального ускорения от времени t

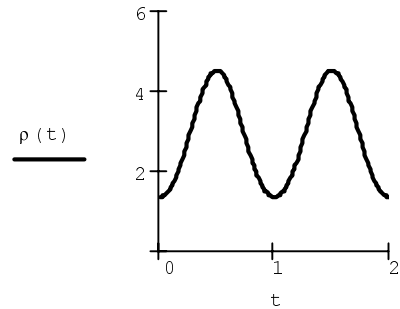


Рис. 1.9. График зависимости радиуса кривизны траектории от времени t

Так как уравнения движения точки являются ее траекторией, заданной в параметрическом виде, отобразить ее на графике (рис. 1.10) можно, задав в шаблоне графика XU : на оси X зависимость $x(t)$, а на оси Y — $y(t)$. Положение точки зададим ее координатами $x(T)$ и $y(T)$.

Стандартные методы Mathcad не позволяют изображать на графиках определяемые векторы. Расширить возможности Mathcad, обеспечивающие дифференцирование и отображение векторов, можно с помощью пользовательских функций-подпрограмм (см. разд. П1.9 Приложения 1), которые находятся в отдельном файле user_fun.mcd. Для определенности этот файл расположим по адресу: $C:\text{Program Files}\text{Mathsoft}\text{user_fun.mcd}$.

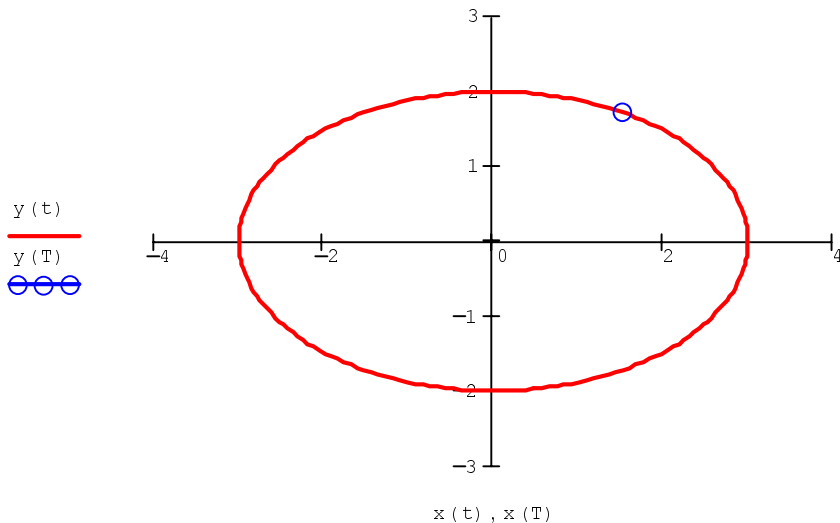


Рис. 1.10. Траектория точки и ее положение в момент времени $t = T$

Далее приведен пример решения данной задачи с применением функций-подпрограмм пользователя.

Введем исходные данные задачи и подключим файл с пользовательскими подпрограммами-функциями:

$$T := \frac{1}{3} \quad \omega := \pi \quad y(t) := 2 \sin(\omega t)$$

Подключение файла с подпрограммами-функциями осуществляем командой **Insert | Reference** главного меню.

➔ Reference:C:\Program Files\Mathsoft\user fun.mcd

Зададим с помощью трехэлементной матрицы-столбца вектор $\vec{r}(t)$, который определяет закон движения точки, и вычислим его компоненты в момент времени $t = T$.

$$r(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad r(T) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.732 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\text{angle}(r(T)_0, r(T)_1)}{\text{deg}} = 49.107$$

Для дифференцирования вектора $\vec{r}(t)$, определяющего движение точки, воспользуемся подпрограммой-функцией `Diff_v`, находящейся в файле `user_fun.mcd`, листинг которой представлен в разд. П1.9 приложения 1. Найдем вектор скорости точки и его направление относительно оси Ox в произвольный момент времени.

$$v(t) := \text{Diff_v}(r, t, 1)$$

$$v(t) \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \cdot \sin(\pi \cdot t) \cdot \pi \\ 2 \cdot \cos(\pi \cdot t) \cdot \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_v(t) := \frac{\text{angle}(v(t)_0, v(t)_1)}{\text{deg}}$$

Вычисляем вектор скорости точки, его модуль и направление относительно оси Ox в момент времени $t=T$.

$$v(T) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \cdot 31^{\frac{1}{2}} \cdot \pi \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.162 \\ 3.142 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|v(T)| \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 31^{\frac{1}{2}} \cdot \pi = 8.746$$

$$\alpha_v(T) = 158.948$$

Найдем вектор ускорения точки и его направление относительно оси Ox в произвольный момент времени.

$$a(t) := \text{Diff_v}(r, t, 2)$$

$$a(t) \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \cdot \cos(\pi \cdot t) \cdot \pi^2 \\ -2 \cdot \sin(\pi \cdot t) \cdot \pi^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_a(t) := \frac{\text{angle}(a(t)_0, a(t)_1)}{\text{deg}}$$

Вычисляем вектор ускорения точки, его модуль и направление относительно оси Ox в момент времени $t=T$.

$$a(T) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \cdot \pi^2 \\ \frac{1}{2} \\ -3 \cdot \pi^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14.804 \\ -17.095 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|a(T)| \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 21^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^2 = 22.614$$

$$\alpha_a(T) = 229.107$$

Величины тангенциального a_τ и нормального a_n ускорений найдем как проекции вектора ускорения на направления единичных векторов касательной $\bar{\tau}$ и главной нормали \bar{n} , которые задаются подпрограммами-функциями Tau и Normal (см. разд. П1.9 приложения 1) в заданной точке траектории.

$$a_\tau(t) := a(t) \cdot \text{Tau}(r, t)$$

$$a_n(t) := a(t) \cdot \text{Normal}(r, t)$$

$$\beta(t) := \frac{\text{angle}(a_n(t), a_\tau(t))}{\text{deg}}$$

$$\rho(t) := \frac{v(t) \cdot v(t)}{a_n(t)}$$

Вычисляем значения тангенциального и нормального ускорений точки, а также радиус кривизны траектории в момент времени $t=T$.

$$a_\tau(T) = 7.676$$

$$a_n(T) = 21.272$$

$$\beta(T) = 19.842$$

$$\rho(T) = 3.596$$

Вычисляем проекцию вектора скорости точки на единичный вектор касательной к траектории V_τ .

$$V_\tau(t) := v(t) \cdot \text{Tau}(r, t)$$

$$V_\tau(T) = 8.746$$

Строим графики зависимостей найденных величин от времени в интервале $0 \leq t \leq 2$ [с] (рис. 1.11—1.13).

Зададим переменную t в виде дискретной переменной

$$t := 0, 0.01.. 2.$$

Для отображения векторов скорости и ускорения точки воспользуемся подпрограммой-функцией vector# (файл user_fun.mcd), листинг которой представлен в разд. П1.9 приложения 1.

Формируем вектор скорости V_v точки для произвольного момента времени:

$$Vv(t) := \text{vector7}(x(t), y(t), v(t)_0, v(t)_1, 0.25).$$

Формируем вектор ускорения V_a точки для произвольного момента времени:

$$Va(t) := \text{vector5}(x(t), y(t), a(t)_0, a(t)_1, 0.1).$$

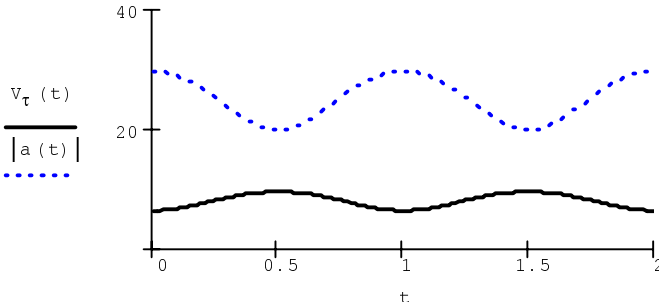


Рис. 1.11. График зависимостей проекции вектора скорости на единичный вектор касательной к траектории и модуля ускорения от времени t

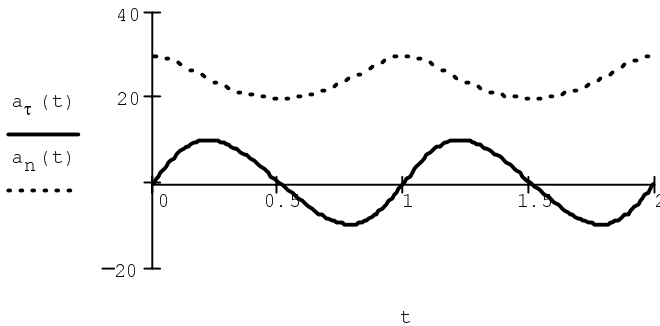


Рис. 1.12. Графики зависимостей тангенциального и нормального ускорений от времени

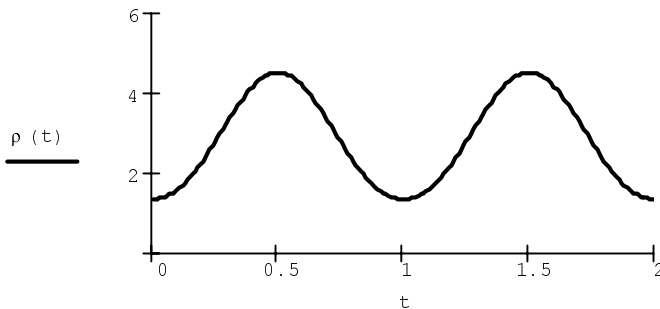


Рис. 1.13. График зависимости радиуса кривизны траектории от времени

Подпрограмма-функция L_* обеспечивает формирование требуемого символа на графике:

$$M(T) := L_M(x(T) + 0.1, y(T) + 0.1, 0.04) .$$

Для отображения на графике (рис. 1.14) векторов скорости и ускорения точки в любой момент времени внутри заданного интервала воспользуемся элементом управления **Slider**. Максимальное значение переменной T , которая определяется внутри данного элемента, зададим равным 300 (см. разд. П1.10.2 Приложения 1).

$T :=$



$$T := \frac{T}{100} *$$

$T = 0.333$

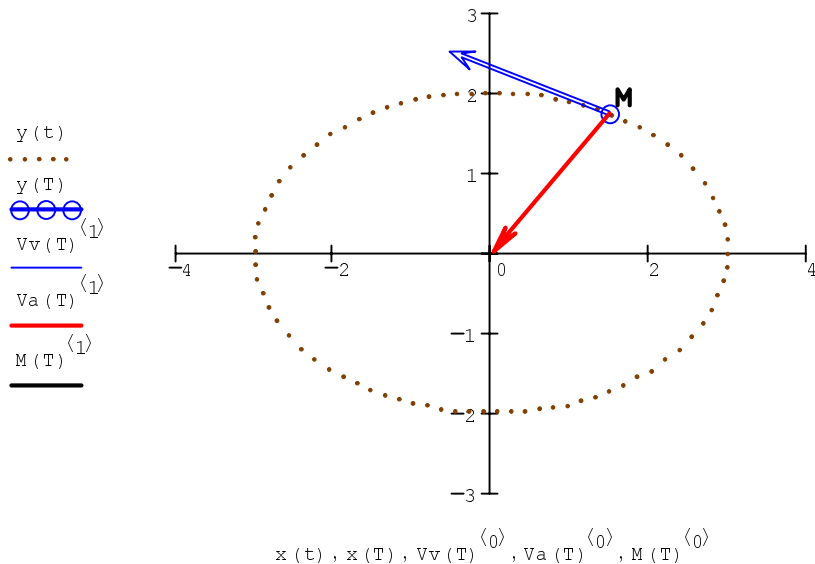


Рис. 1.14. Отображение траектории точки, векторов скорости и ускорения в момент времени $t = T$

Примечание

При построении в Mathcad графиков, в которых необходимо обеспечить одинаковый масштаб по обеим осям координат, следует в контекстном меню графика выбрать опцию **Format**, а затем на вкладке **X-Y-Axes** поставить флажок напротив строки **Equal Scales** (см. разд. П1.6 Приложения 1).

Формируем вектор скорости, и его проекций на оси декартовой системы координат V_x и V_y в момент времени $t = T$.

$M_v := 0.3$ Задаем масштаб векторов скоростей точки.

$$Vv(t) := \text{vector7}(x(t), y(t), v(t)_0, v(t)_1, M_v)$$

$$Vx(t) := \text{vector5}(x(t), y(t), v(t)_0, 0, M_v)$$

$$Vy(t) := \text{vector5}(x(t), y(t), 0, v(t)_1, M_v)$$

Формируем вектор ускорения и его проекций на оси декартовой системы координат Vax и Vay в момент времени $t = T$.

$M_a := 0.15$ Задаем масштаб векторов ускорений точки.

$$Va(t) := \text{vector7}(x(t), y(t), a(t)_0, a(t)_1, M_a)$$

$$Vax(t) := \text{vector5}(x(t), y(t), a(t)_0, 0, M_a)$$

$$Vay(t) := \text{vector5}(x(t), y(t), 0, a(t)_1, M_a)$$