В. В. Григорьев-Голубев, Н. В. Васильева, Е. А. Кротов

Теория вероятностей и математическая статистика

Руководство по решению задач

bhv

В. В. Григорьев-Голубев
Н. В. Васильева
Е. А. Кротов

Теория вероятностей и математическая статистика

Руководство по решению задач

Допущено научно-методическим советом по математике вузов северо-запада
в качестве учебника для студентов вузов,
обучающихся по инженерным и инженерно-экономическим специальностям

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2014

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.1я73
Г83

Григорьев-Голубев, В. В.

Г83 Теория вероятностей и математическая статистика. Руководство по решению задач: учебник / В. В. Григорьев-Голубев, Н. В. Васильева, Е. А. Кротов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2014. — 256 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-3294-5

В книге содержится описание и примеры выполнения входящих в учебные программы лабораторных работ по математической статистике, даются первоначальные сведения о пакете прикладных математических программ Mathcad и примеры выполнения лабораторных работ в среде Mathcad. Краткие сведения из теории по каждому разделу дисциплины позволят студентам технических и экономических вузов сэкономить время, а подробный разбор приведенных в книге задач сформирует правильный подход к их постановке и выбору метода решения. На основе излагаемого материала преподаватели математики могут формировать варианты контрольных и лабораторных работ, а также индивидуальных домашних заданий — типовых расчетов.

Для студентов и преподавателей высших учебных заведений

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.1я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зав. редакцией	*Екатерина Капалыгина*
Редактор	*Анна Кузьмина*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн серии	*Инны Тачиной*
Оформление обложки	*Марины Дамбиевой*
Фото	*Кирилла Сергеева*

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

В. М. Лихачев, д-р физ.-мат. наук, профессор, завкафедрой высшей математики ВКА им. А. Ф. Можайского

В. Б. Хазанов, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики и математического моделирования СПбГМТУ

Подписано в печать 31.10.13.
Формат 70×100$^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,64.
Тираж 1000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

Первая Академическая типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12/28

ISBN 978-5-9775-3294-5

Оглавление

Предисловие

Данная книга написана на основе курса лекций по дисциплине "Теория вероятностей и математическая статистика", которые читаются авторами на протяжении ряда лет студентам Санкт-Петербургского государственного морского технического университета и Военно-космической академии А. Ф. Можайского, и адресована студентам технических университетов. Цель пособия — помочь учащимся в выработке навыков самостоятельного решения вероятностных задач и в подготовке к контрольным испытаниям.

Объем материала соответствует ФГОС третьего поколения, а глубина изложения — уровню требований к математической подготовке выпускника российского технического университета.

Каждый раздел книги предваряет необходимый теоретический материал, включающий в себя самые важные определения и теоремы. Теоретический материал изложен в кратком виде и дополнен большим количеством задач с подробным разбором их решения. В конце каждого раздела помещены задачи, предлагающиеся для самостоятельного решения, снабженные развернутыми ответами.

Глава 1 "Элементы комбинаторики" включена в работу в связи с необходимостью использования некоторых формул комбинаторного анализа при подсчете вероятностей. В ней даны формулы для вычисления числа размещений, подстановок и сочетаний из некоторого конечного множества и разобран ряд задач с использованием этих формул.

В *главе 2 "Случайные события"* дано понятие случайного события и определены алгебраические операции над событиями. Вероятность случайного события определяется на основе аксиоматики А. Н. Колмогорова, а при разборе задач большое внимание уделяется построению вероятностных моделей эксперимента.

В *главах 3—5* рассматриваются случайные величины, случайные векторы и функции случайных величин. Здесь даются определения дискретных и непрерывных случайных величин и векторов, законы их распределения, а также определения и свойства числовых характеристик. В качестве примеров рассматриваются такие законы распределения дискретной случайной величины, как биномиальный закон, закон Пуассона и геометрический закон, а также такие законы распределения непрерывной случайной величины, как равномерный, показательный и нормальный, законы распределения. В *главе 4* большое внимание уделено вопросам независимости случайных величин и нахождению функций регрессии, а *глава 5* дополнена такими распределениями, как распределение χ^2 и Стьюдента.

В конце каждой главы даны задания для типовых расчетов по всем темам раздела, содержащие 30 вариантов в каждом задании.

Главы 6 и *7* относятся к разделу "Математическая статистика". В них рассматриваются вопросы первичной обработки экспериментальных данных, получения точечных и интервальных статистических оценок параметров исследуемого распределения, применения критериев согласия для проверки статистических гипотез, т. е. те вопросы, которые включены в ФГОС третьего поколения и по которым в технических университетах даются лабораторные и курсовые работы. В этих главах приведены примеры выполнения лабораторных работ с вычислениями, выполненными на калькуляторе и в среде Mathcad.

В *приложении* приведены таблицы, необходимые для решения задач по теории вероятностей и выполнения лабораторных работ по математической статистике, а в конце книги — список цитируемой литературы и ответы к задачам для самостоятельного решения.

Авторы надеются, что книга окажется полезной не только для студента любого технического университета, но и для преподавателей, ведущих практические занятия.

ГЛАВА 1

Элементы комбинаторики

Некоторые формулы и задачи комбинаторного анализа (комбинаторики) представлены в данной книге в связи с тем, что они используются во многих задачах классической теории вероятностей.

1.1. Принцип умножения и принцип сложения

Принцип умножения

Пусть требуется выполнить k упорядоченных и взаимоисключающих друг друга действий. Если первое из этих действий можно выполнить n_1 способами, второе — n_2 способами, ..., k-е действие — n_k способами, то все k упорядоченных действий можно выполнить n способами, где

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k. \tag{1.1}$$

Задача 1.1. Сколько существует всевозможных шестизначных чисел?

Решение. Первая цифра числа не может быть нулем. Следовательно, первой может быть любая из цифр от 1 до 9. Остальные пять мест в числе могут быть заняты любой из десяти цифр. Поэтому, согласно принципу умножения, количество шестизначных чисел равно:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 900\ 000.$$

Принцип сложения

Если для выполнения какого-то действия имеется: n_1, или n_2, ..., или n_k взаимно исключающих друг друга способов, то общее количество способов, которое можно использовать для выполнения этого действия, равно:

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k . \tag{1.2}$$

Задача 1.2. Сколько пар разных пирожных можно выбрать, если имеется десять пирожных "Эклер", семь пирожных "Буше" и восемь корзиночек?

Решение. Пары пирожных могут составляться из пирожных "Эклер" и "Буше", для этого имеется $10 \cdot 7 = 70$ вариантов. Пары пирожных могут быть составлены из пирожных "Эклер" и корзиночек — таких $10 \cdot 8 = 80$ вариантов. И, наконец, это могут быть пирожные "Буше" и корзиночки — $7 \cdot 8 = 56$ вариантов. Общее количество способов n определяется по принципу сложения (1.2)

$$n = 70 + 80 + 56 = 206 .$$

1.2. Размещения, перестановки, сочетания

Пусть имеется множество E, содержащее n элементов, и из этого множества делаются выборки по m элементов в каждой $(m \le n)$.

Размещениями называются упорядоченные выборки из множества E. Число размещений из n элементов по m вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1), \tag{1.3}$$

или

$$A_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) \cdot (n-m) \cdot (n-m-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-m) \cdot (n-m-1) \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!} .$$

Пример 1. Имеется множество $E = \{1; 2; 3\}$. Из элементов этого множества составляются двухэлементные упорядоченные множества:

$$\{1; 2\},\ \{1; 3\},\ \{2; 1\},\ \{2; 3\},\ \{3; 1\},\ \{3; 2\} .$$

Чтобы убедиться, что мы выписали все размещения, определим их количество, используя формулу (1.3):

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6 .$$

При $m = n$ размещения называются *перестановками*. Число перестановок из n элементов равно

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!.$$

Задача 1.3. Сколько шестизначных чисел с различными цифрами можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Решение. Количество таких чисел равно числу размещений из шести по шесть, т. е. числу перестановок из шести. Поэтому

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 .$$

Сочетаниями называются неупорядоченные выборки из множества E. Число сочетаний из n элементов по m вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1)}{m!} . \tag{1.4}$$

Пример 2. Если в примере 1 из элементов этого множества E составляются двухэлементные неупорядоченные множества, то число таких множеств — число сочетаний из трех элементов по два — равно 3, т. к. одинаковыми сочетаниями будут множества $\{1;2\}$ и $\{2;1\}$, $\{1;3\}$ и $\{3;1\}$, $\{2;3\}$ и $\{3;2\}$. Поэтому сочетаниями будут только следующие три выборки:

$$\{1;2\},\ \{1;3\},\ \{2;3\}.$$

Для сочетаний часто более удобной является формула:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}. \qquad (1.5)$$

Например, $C_3^2 = \dfrac{3!}{2!\cdot 1!} = \dfrac{6}{2} = 3$.

При вычислении числа сочетаний следует учитывать, что:

$$C_n^m = C_n^{n-m},\ C_n^1 = n,\ C_n^n = 1.$$

Задача 1.4. Сколько четырехзначных чисел можно составить, используя для их записи только две цифры?

Решение. Если числа составляются из цифр 1, 2, ..., 9, то имеется C_9^2 вариантов выбора двух цифр из девяти. Каждая позиция четырехзначного числа может быть заполнена одной из двух выбранных цифр, т. е. имеется $2^4 = 16$ вариантов составления числа. При этом должны быть исключены два случая, при которых четырехзначное число состоит из одинаковых цифр. Поэтому, согласно принципу умножения (1.1), количество k_1 четырехзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, ..., 9, равно:

$$k_1 = C_9^2\cdot(16-2) = \frac{9\cdot 8}{2}\cdot 14 = 9\cdot 8\cdot 7.$$

Иначе следует подсчитывать количество четырехзначных чисел, в записи которых есть ноль, поскольку число не может начинаться с нуля. Первая позиция таких чисел может быть занята одной из цифр 1, 2, ..., 9, т. е. имеется 9 вариантов выбора. Остальные три позиции могут быть заняты этой же цифрой или нулем, за исключением случая, когда в записи числа одна цифра, т. е. 2^3-1 вариантов выбора. Поэтому количество k_2 таких чисел равно

$$k_2 = 9\cdot\left(2^3-1\right) = 9\cdot 7.$$

Искомое количество четырехзначных чисел определяется по принципу сложения (1.2):

$$k = k_1 + k_2 = 9\cdot 8\cdot 7 + 9\cdot 7 = 9\cdot 7\cdot 9 = 81\cdot 7 = 567.$$

1.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.5. В магазине канцелярских товаров имеется 18 шариковых ручек красного цвета, 8 — синего цвета и 6 — черного цвета. Кроме того, в наличии есть 4 ручки, которые могут писать синим и красным цветом, а также две ручки, которые могут писать тремя цветами. Сколькими способами можно сделать покупку, чтобы иметь возможность писать всеми тремя цветами?

Задача 1.6. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить, используя три цифры: 1, 2 и 3? Используя цифры 0, 1 и 2?

Задача 1.7. Сколько различных трехцветных полосатых флагов (полосы могут быть расположены как горизонтально, так и вертикально) можно сшить, если имеется материал пяти цветов?

Задача 1.8. Сколькими способами могут встать в очередь для сдачи зачета 6 студентов? Сколькими способами они могут организовать очередь, если Маша и Саша должны стоять рядом? Сколько получится вариантов, если при этом Саша должен стоять после Маши?

Задача 1.9. Пять книг, среди которых 2 одинаковые, расставляются на полке. Сколько имеется вариантов их расстановки?

Задача 1.10. В поселке 12 домов. Каждые два дома соединены друг с другом пешеходными дорожками с цветами. Сколько таких дорожек?

Задача 1.11. Из ящика с деталями двух типов выбирают 3 детали. Сколькими способами это можно сделать, если деталей первого типа 6, второго типа — 4, а из трех выбранных деталей две должны быть первого типа?

Задача 1.12. Имеется 6 роз красного и 6 роз белого цвета. Сколько различных букетов из них можно составить, если каждый букет должен состоять из двух роз красного цвета и трех роз белого цвета?

Задача 1.13. В группе из 50 студентов 20 знают немецкий язык, 15 — английский, 5 — оба языка, а остальные знают только русский. Сколькими способами можно выбрать из этой группы двух студентов, чтобы вместе они могли понять и английскую, и немецкую речь?

ГЛАВА 2

Случайные события

2.1. Случайный эксперимент. Пространство элементарных событий. Случайное событие

Под словами "эксперимент", "опыт", "наблюдение", "испытание" понимается процесс, который можно осуществлять (в том числе и мысленно) неограниченное число раз, выполнив некоторую фиксированную совокупность условий S. Результат *эксперимента* называется *исходом*.

Если в результате проведения эксперимента наступает только один исход, то такой эксперимент называется *детерминированным*. Если же в результате эксперимента могут наступить два и более исходов, то такой эксперимент называют *случайным.*

Наравне с термином "исход" используют также термин *"элементарное событие"*. Множество всех исходов (элементарных событий) данного случайного эксперимента образует *пространство элементарных событий*, которое обозначают Ω, а сами элементарные события — ω.

Следует понимать, что одному и тому же случайному эксперименту в зависимости от того, что в нем наблюдается, можно сопоставить разные пространства элементарных событий Ω. Например, если при бросании игральной кости наблюдается количество выпавших очков, то пространство элементарных событий включает в себя шесть исходов, т. е.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\},$$

где ω_i — элементарное событие, которое состоит в том, что выпадает грань с i очками. Если в этом же эксперименте наблюдается, выпало или не выпало шесть очков, то пространство элементарных событий включает в себя два исхода: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, где ω_1 — выпало шесть очков, ω_2 — не выпало шесть очков.

Пространство Ω может представлять собой дискретное множество: конечное $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ или счетное $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$. Ω может также являться и несчетным множеством.

Пример 1. В урне 5 белых и три красных шара. Вынимают случайным образом последовательно 2 шара. Такому эксперименту соответствуют 4 исхода:

- оба шара белые;
- первый шар белый, а второй — красный;
- первый шар красный, а второй — белый;
- оба шара красные.

Пространство элементарных событий (исходов) данного эксперимента можно символически представить в следующем виде:

$$\Omega = \{(\text{Б, Б});\ (\text{Б, К});\ (\text{К, Б});\ (\text{К, К})\},$$

где буквами "Б" и "К" обозначен цвет выбранного шара: белый или красный соответственно. В этом примере пространство элементарных событий конечно.

Пример 2. Эксперимент состоит в том, что бросается игральная кость до тех пор, пока не выпадет 6 очков. В этом эксперименте пространство элементарных событий будет бесконечным и счетным $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, поскольку эксперимент теоретически может продолжаться бесконечно. При этом исход ω_1 соответствует тому, что 6 очков выпало на первом бросании, исход ω_2 означает, что на первом бросании не выпало 6 очков, а на втором — выпало, ..., исход ω_n означает, что 6 очков выпало на n-м бросании, а на предыдущих $n-1$ бросаниях выпало какое-то другое число очков.

Пример 3. Если при проведении эксперимента отмечается время t прихода автобуса на автобусную остановку в течение 12 часов (т. е. $\omega = t$), то пространство элементарных событий будет несчетным:

$$\Omega = \{t \mid t \in [0, 12]\}.$$

Подмножество A пространства элементарных событий Ω $(A \subset \Omega)$ называется *случайным событием* или просто *событием.* В конечном и счетном случаях это может быть любое подмножество, а в несчетном случае — специальным образом выбранное (подробнее об этом *см. в разд. 2.3*).

Говорят, что при проведении случайного эксперимента S событие A произошло, если наступил исход ω, принадлежащий событию A ($\omega \in A$).

2.2. Алгебраические операции над случайными событиями

Определение 2.1. *Невозможным* называется событие, которое не содержит ни одного элементарного события пространства Ω данного эксперимента. Невозможное событие обозначается $\varnothing$.

Замечание

Другими словами, невозможным называется событие, которое не происходит ни при одном проведении данного эксперимента, т. е. пустое множество.

Определение 2.2. *Достоверным* называется событие, которое содержит все элементарные события пространства Ω данного эксперимента. Достоверное событие обозначается Ω.

Замечание

Другими словами, достоверным называется событие, которое происходит при каждом проведении данного эксперимента.

Определение 2.3. *Суммой* событий A и B называется событие, которое включает в себя все элементарные события, принадлежащие или событию A, или событию B, или им обоим. Сумма событий обозначается $A+B$.

Замечание

Другими словами, суммой событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий-слагаемых.

Если изобразить пространство элементарных событий в виде прямоугольника на плоскости, а события A и B в виде множеств точек, лежащих внутри этого прямоугольника, то сумма событий $A+B$ представляет собой заштрихованную область, изображенную на рис. 2.1.

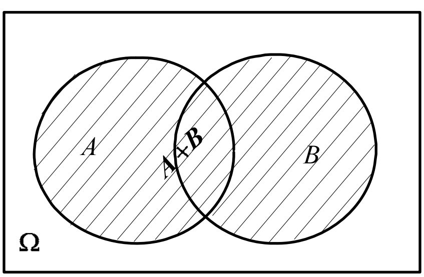

Рис. 2.1

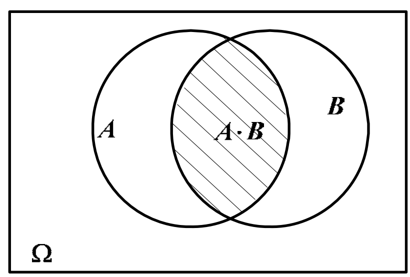

Рис. 2.2

Определение 2.4. *Произведением* событий A и B называется событие, которое состоит из элементарных событий, принадлежащих обоим этим событиям (рис. 2.2). Произведение событий обозначается $A \cdot B$.

Замечание

Другими словами, произведением событий называется событие, состоящее в одновременном наступлении событий-сомножителей.

Определение 2.5. События A и B называются *несовместными*, если $A \cdot B = \varnothing$.

Замечание

Если $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ — пространство элементарных событий некоторого эксперимента, то исходы ω_i — несовместные события, т. к. при каждой реализации эксперимента происходит только один исход. Сумма всех исходов — достоверное событие, т. к. при каждой реализации эксперимента какой-то исход (результат эксперимента) должен произойти.

Определение 2.6. *Разностью* событий A и B называется событие, состоящее из элементарных событий, принадлежащих событию A и не принадлежащих событию B (рис. 2.3). Разность событий обозначается $A - B$.

Замечание

Другими словами, разностью событий называется событие, состоящее в наступлении события-уменьшаемого и не наступлении события-вычитаемого.

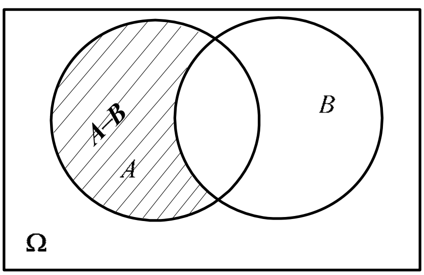

Рис. 2.3

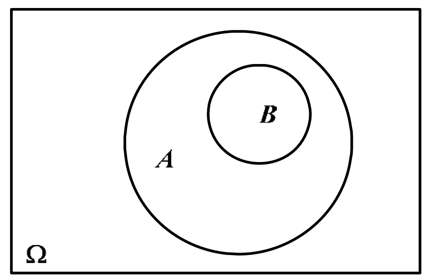

Рис. 2.4

Определение 2.7. Говорят, что событие B *влечет за собой* событие A, и пишут $B \subset A$, если множество элементарных событий, из которых состоит событие B, является подмножеством множества элементарных событий, из которых состоит событие A (рис. 2.4).

Определение 2.8. Говорят, что события A и B *тождественны* (равны) друг другу, и пишут $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Определение 2.9. Событие $\overline{A} = \Omega - A$ называется *противоположным* событию A (рис. 2.5).

Если событие $\overline{A}$ — противоположное событию A, то:

$$\begin{cases} A \cdot \overline{A} = \varnothing, \\ A + \overline{A} = \Omega. \end{cases}$$

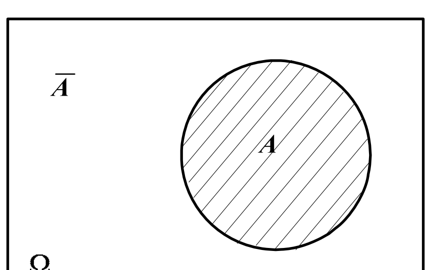

Рис. 2.5

Задача 2.1. Пусть A_1, A_2 и A_3 — произвольные наблюдаемые в эксперименте события. Найдите выражения для следующих событий:

1) произошло только одно из этих событий;

2) произошли все три события;

3) не произошло ни одно из них;

4) произошло хотя бы одно из событий A_1, A_2, A_3.

Решение. 1) Пусть событие B состоит в том, что произошло только одно из событий A_1, A_2, A_3. Тогда

$$B = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 .$$

2) Пусть событие C состоит в том, что произошли все три события A_1, A_2 и A_3 одновременно. Тогда C — это их произведение, т. е.

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 .$$

3) Пусть событие D состоит в том, что не произошло ни одно из событий A_1, A_2, A_3. Следовательно, в данном случае, произошли одновременно три события, противоположных событиям A_1, A_2 и A_3 соответственно. Тогда D является произведением этих противоположных событий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_3$, т. е.

$$D = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 .$$

4) Пусть событие F состоит в том, что произошло хотя бы одно из событий A_1, A_2, A_3. По определению суммы событий

$$F = A_1 + A_2 + A_3 .$$

Поскольку событие F является противоположным событию D, то его можно выразить через события A_1, A_2, A_3 и в таком виде:

$$F = \Omega - D = \Omega - \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 .$$

Задача 2.2. В коробке лежат красные и синие фломастеры. Случайным образом выбирают два из них. Событие A состоит в том, что оба фломастера оказались красными. Событие B — один из них красный, а один — синий. Что означают события $\overline{A}, \overline{B}, A+B, A \cdot B, A \cdot \overline{B}, \overline{A} \cdot B$?

Решение. Построим пространство элементарных событий данного эксперимента, обозначая цвет фломастеров буквами: К — красный цвет и С — синий. Отметим при этом исходы, входящие в события A и B:

$$\Omega = \left\{ \overbrace{(\text{КК})}^{A} \overbrace{(\text{КС})\,(\text{СК})\,(\text{СС})}^{\overline{A}} \right\} \quad \text{или} \quad \Omega = \left\{ \overbrace{\underbrace{(\text{КК})}_{A}(\text{СС})}^{\overline{B}} \overbrace{(\text{КС})\,(\text{СК})}^{B} \right\} .$$

Из вида пространства Ω ясно, что событие $\overline{A}$ состоит в том, что хотя бы один из двух фломастеров — синий, а событие $\overline{B}$ — взятые фломастеры одного цвета: оба красные или оба синие.

В событие $A+B$ не входит только один исход эксперимента — $\{\text{СС}\}$. Поэтому событие $A+B$ означает, что хотя бы один из выбранных фломастеров — красный. События A и B несовместные, поэтому $A \cdot B = \varnothing$. Поскольку $A \subset \overline{B}$, а $B \subset \overline{A}$, то $A \cdot \overline{B} = A$ и $\overline{A} \cdot B = B$.

Задача 2.3. Баскетболист бросает мяч в корзину до первого попадания. Событие A_i — он попал при i-м броске, событие B — он попал в корзину с четвертого раза. Выразить событие B через события A_i.

Решение. Событие B является произведением четырех событий:

- $\overline{A}_1$ — промах при первом броске;
- $\overline{A}_2$ — промах при втором броске;
- $\overline{A}_3$ — промах при третьем броске;
- A_4 — попадание при четвертом броске.

Следовательно, $B = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot A_4$.

Задача 2.4. Из колоды карт последовательно случайным образом вынимают три карты. Событие A_1 — первая карта красной масти, событие A_2 — вторая карта красной масти, событие A_3 — третья карта красной масти, событие B — хотя бы одна карта черной масти. Выразить событие B через события A_i $(i = 1, 2, 3)$.

Решение. По определению суммы событий

$$B = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 .$$

Однако в данной задаче удобнее перейти к противоположному событию $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = \overline{B}$ — все три карты красной масти. Тогда, с учетом определения 2.9, событие B равно разности событий:

$$B = \Omega - A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 .$$

Замечание

Событие B можно выразить через события A_i, не вводя событие Ω, т. е. $B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1\overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2\overline{A}_3$.

Задача 2.5. Событие A состоит в том, что номер телефона оканчивается на цифру, являющуюся четным числом. Событие B состоит в том, что номер телефона оканчивается на ноль. Что означают события: $A+B$, $A \cdot B$, $A \cdot \overline{B}$, $\overline{A} \cdot B$?

Решение. При решении этой задачи следует понимать, что $B \subset A$ (рис. 2.6).

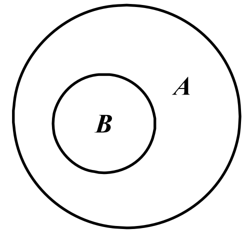

Рис. 2.6

Тогда ясно, что:

- $A + B = A$, т. е. номер телефона оканчивается на цифру, которая является четным числом;
- $A \cdot B = B$, т. е. номер телефона оканчивается на ноль;
- $A \cdot \overline{B} = A - B$, т. е. номер телефона оканчивается на 2, 4, 6, 8;
- $\overline{A} \cdot B = \varnothing$, т. е. невозможное событие.

Замечание

Задачи 2.6—2.11 предлагается решить самостоятельно.

Задача 2.6. Из колоды 36 карт последовательно вынимают три карты. Событие A_k $(k = 1,2,3)$ — *k*-я карта пиковой масти. Что означают события:

1) $A_1 + A_2 + A_3$; 2) $A_1 A_2 A_3$; 3) $A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3$?

Задача 2.7. Событие A — хотя бы один из четырех проведенных четырьмя охотниками выстрелов попал в цель, B — все выстрелы дали промах, событие C — только один выстрел попал в цель. Что означают события $A + B$, $A \cdot B$, $A \cdot C$, $\overline{A}$, $A - C$?

Задача 2.8. Два игрока по очереди вынимают из колоды 36 карт по одной карте. Выигрывает тот, кто первым вынет даму пиковой масти. Событие A_k — первый игрок вынимает даму пик на *k*-м ходе, событие B_j — даму пик вынимает второй игрок на *j*-м ходе, событие C — первый выиграл до четвертого хода. Выразить событие C через события A_k и B_j.

Задача 2.9. Цепь состоит из трех элементов первого типа и одного элемента второго типа и выходит из строя, если неисправны все элементы первого типа или элемент второго типа. Событие A_i — не исправен *i*-й элемент первого типа $(i = 1, 2, 3)$, B — не исправен элемент второго типа, C — цепь вышла из строя. Выразить события C и $\overline{C}$ через A_i и B.

Задача 2.10. Пусть A, B и C — произвольные случайные события. Выразить через них следующие события:

1) произошло только событие A;

2) произошло ровно два события из указанных трех;

3) ни одно событие не произошло;

4) все три события произошли;

5) произошло хотя бы одно событие;

6) хотя бы одно событие не произошло.

Задача 2.11. Подбрасываются три монеты. События: A_k, $(k=1,2,3)$ — на *k*-й монете выпал герб, B — на трех монетах выпало не более одного герба, C — на всех трех монетах выпал герб. Выразить события B и $\overline{C}$ через события A_k.

2.3. Вероятностная модель случайного эксперимента. Вероятностное пространство

В теории вероятностей каждому случайному событию сопоставляется числовая мера его осуществления — вероятность данного события. Говорят, что построена вероятностная модель случайного эксперимента, если установлена связь между исходами и их вероятностями, что дает возможность вычислять вероятность любого события $A \subset \Omega$.

В общем случае такой моделью служит вероятностное пространство $\langle \Omega, \Im, P \rangle$, где Ω — пространство элементарных событий; $\Im$ — некоторое множество событий, над которыми определены операции сложения, умножения, вычитания и перехода к противоположному событию; P — заданная на множестве $\Im$ функция этих событий ($P = P(A)$, где $A \in \Im$), называемая вероятностью этих событий.

Для конечного и счетного Ω вероятностное пространство можно представить в более простой форме.

Вероятностная модель случайного эксперимента с конечным числом исходов

Предположим, что случайный эксперимент имеет конечное число исходов, т. е. пространство элементарных событий Ω является конечным.

Вероятностной моделью эксперимента с конечным числом исходов служит конечное вероятностное пространство, которое удобно записывать в виде:

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_n \\ P(\omega_1) & P(\omega_2) & \ldots & P(\omega_n) \end{pmatrix},$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — исходы эксперимента (элементарные события); $P(\omega_1)$, $P(\omega_2), \ldots, P(\omega_n)$ — аксиоматически приписанные исходам вероятности, для которых должны выполняться:

- $P(\omega_i) \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ — *аксиома неотрицательности*;
- $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$ — *аксиома нормированности*.

Определение 2.10. *Вероятностью произвольного события* $A \in \Im (A \subset \Omega)$ в вероятностной модели с конечным числом исходов называется число, обозначаемое $P(A)$ и равное сумме вероятностей всех входящих в него исходов.

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i). \quad (2.1)$$

Замечание 1

В случае эксперимента с конечным числом исходов система множеств $\Im$ замкнута относительно введенных на ней конечного числа операций сложения и умножения, т. е. из того, что $A \in \Im$ и $B \in \Im$ следует: 1) $A + B \in \Im$; 2) $A \cdot B \in F$; 3) $\overline{A} \in \Im$; 4) $\Omega \in \Im$. В этом случае говорят, что система подмножеств $\Im$ является *алгеброй*.

Замечание 2

Легко убедиться, что определенная формулой (2.1) вероятность $P(A)$ удовлетворяет трем аксиомам:

P1. аксиоме неотрицательности: $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \Im$;

P2. аксиоме нормированности: $P(\Omega) = 1$;

P3. аксиоме аддитивности: если $A \in \Im$ и $B \in \Im$ — несовместные, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Формула классической вероятности

Если пространство элементарных событий некоторого случайного эксперимента S конечно, т. е. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, а все исходы (элементарные события) ω_i, $(i = 1, 2, ..., n)$ — равновозможные, то вероятность появления случайного события $A \in \Im \;\; (A \subset \Omega)$ можно определить по *формуле классической вероятности*

$$P(A) = \frac{m_A}{n}, \quad (2.2)$$

где n — множество всех исходов данного эксперимента; m_A — множество исходов, благоприятствующих наступлению события A (входящих в событие A).

Замечание

При подсчете вероятностей с помощью классического определения часто оказываются полезными сведения из комбинаторики, приведенные в *главе 1*.

Задача 2.12. Монета бросается два раза. Какова вероятность того, что один раз выпадет герб, а другой раз — решетка?

Решение. Задачу можно решить по определению 2.1, построив пространство элементарных событий или используя формулу классической вероятности (2.2).

1-й способ. Построим пространство элементарных событий рассматриваемого эксперимента так же, как это было сделано в примере 2.2.

$$\Omega = \{(\text{Г}, \text{Г});\ (\text{Г}, \text{Р});\ (\text{Р}, \text{Г});\ (\text{Р}, \text{Р})\}.$$

Поскольку нет оснований предпочесть один исход эксперимента другому, то полагаем, что вероятности этих событий равны, т. е.

$$P(\text{Г}, \text{Г}) = P(\text{Г}, \text{Р}) = P(\text{Р}, \text{Г}) = P(\text{Р}, \text{Р}) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, вероятностное пространство эксперимента имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\text{Г}, \text{Г}) & (\text{Г}, \text{Р}) & (\text{Р}, \text{Г}) & (\text{Р}, \text{Р}) \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Обозначим интересующее нас событие через A. Очевидно, что оно содержит два исхода $(\text{Г}, \text{Р})$ и $(\text{Р}, \text{Г})$, т. е. $A = \{(\text{Г}, \text{Р})\} + \{(\text{Р}, \text{Г})\}$. Поэтому, по формуле (2.1) получим

$$P(A) = P\{(\text{Г}, \text{Р})\} + P\{(\text{Р}, \text{Г})\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

2-й способ. Рассматриваемый эксперимент имеет четыре равновозможных исхода: $(\text{Г}, \text{Г})$, $(\text{Г}, \text{Р})$, $(\text{Р}, \text{Г})$, $(\text{Р}, \text{Р})$. Это позволяет нам воспользоваться формулой классической вероятности (2.2). Наступлению интересующего нас события A благоприятствуют два исхода $(\text{Г}, \text{Р})$ и $(\text{Р}, \text{Г})$. Полагая в формуле (2.2) $n = 4$, $m_A = 2$, получим $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

Задача 2.13. На одиннадцати картонных карточках написаны буквы В, Е, Р, О, Я, Т, Н, О, С, Т, Ь. Случайным образом берут шесть карточек и из них составляют слово. Какова вероятность, что из букв, написанных на выбранных карточках, можно составить слово ЯРОСТЬ?

Решение. Пусть событие A — выбранные карточки могут образовать слово ЯРОСТЬ. Используем для вычисления вероятности этого события формулу классической вероятности (2.2).

Найдем число всех исходов эксперимента, которое равно числу сочетаний из 11 (количество всех карточек) по 6 (количество выбираемых карточек):

$$n = C_{11}^{6} = \frac{11!}{6!\,5!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{120} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11}{1} = 462.$$

Число благоприятствующих событию A исходов найдем по принципу умножения (1.1), учитывая, что в заданном наборе букв буквы О и Т повторяются дважды. Поэтому

$$m_A = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4.$$

Следовательно, $P(A) = \dfrac{4}{462} \cong 0{,}0086$.

Задача 2.14. Бросают две игральные кости. Какова вероятность, что сумма выпавших на них очков равна 8?

Решение. Поскольку на каждой грани может выпасть от одного до шести очков, то число всех исходов этого эксперимента, согласно принципу умножения (1.1), равно:

$$n = 6 \cdot 6 = 36 .$$

Выпишем все исходы (табл. 2.1), входящие в событие A — сумма выпавших на игральных костях очков равна восьми.

Таблица 2.1

Первая кость	3	5	4	2	6
Вторая кость	5	3	4	6	2

Из таблицы ясно, что в событие A входят 5 исходов, т. е. $m_A = 5$. Тогда по формуле классической вероятности (2.2):

$$P(A) = \frac{5}{36} .$$

Задача 2.15. Из колоды 36 карт наудачу вынимают три карты. Найти вероятность того, что:

1) все три карты будут красной масти;

2) две карты будут красной масти, а одна — черной;

3) одна карта будет дама, вторая — король, а третья — валет;

4) дама, король и валет будут одной масти.

Решение.

1) Пусть событие A — все три вынутые карты красной масти. По формуле классической вероятности (2.2)

$$P(A) = \frac{m_A}{n} .$$

Исходом эксперимента служит тройка карт, вынутая из колоды, причем нас интересует только состав этой тройки. Число всех исходов n равно числу способов вынуть три карты из 36. Это неупорядоченные выборки. Следовательно, число всех исходов равно числу сочетаний из 36 по 3.

$$n = C_{36}^{3} = \frac{36!}{3! \cdot 33!} = 34 \cdot 35 \cdot 6 .$$

Поскольку карт красной масти половина, т. е. 18, то число благоприятствующих событию A исходов — это число сочетаний из 18 по 3, т. е.

$$m_A = C_{18}^{3} = \frac{18!}{3! \cdot 15!} = 16 \cdot 17 \cdot 3 .$$

Тогда искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{16 \cdot 17 \cdot 3}{34 \cdot 35 \cdot 6} = \frac{4}{35}.$$

2) Пусть B — событие, состоящее в том, что две вынутые карты красной масти, а одна — черная. Число различных исходов при извлечении неупорядоченной тройки карт из колоды подсчитано на предыдущем шаге и равно $n = 34 \cdot 35 \cdot 6$. Число способов вынуть две карты красной масти равно числу сочетаний из 18 по 2, а число способов вынуть одну карту черной масти равно 18. Согласно принципу умножения (1.1) число благоприятных для события B исходов равно

$$m_B = C_{18}^2 \cdot 18 = \frac{18 \cdot 17}{1 \cdot 2} \cdot 18 = 18 \cdot 17 \cdot 9.$$

Тогда по формуле классической вероятности (2.2)

$$P(B) = \frac{18 \cdot 17 \cdot 9}{34 \cdot 35 \cdot 6} = \frac{27}{70}.$$

3) Пусть событие C — вынуты дама, король и валет (масти их любые, возможно и одинаковые). Число всех исходов, как и в предыдущих случаях, равно $n = 34 \cdot 35 \cdot 6$. Число возможностей вынуть из колоды в 36 карт одну даму, или одного короля, или одного валета равно 4. Согласно принципу умножения $m_C = 4 \cdot 4 \cdot 4$. Тогда

$$P(C) = \frac{64}{34 \cdot 35 \cdot 6} = \frac{16}{1785} \cong 0{,}0089.$$

4) Пусть событие D состоит в том, что три вынутые карты — дама, король и валет одной масти. В каждой масти только одна благоприятная комбинация, а мастей — четыре. Тогда по принципу умножения благоприятных для события D исходов столько же, сколько мастей в колоде карт, т. е. $m_D = 4$. Поэтому

$$P(D) = \frac{4}{34 \cdot 35 \cdot 6} = \frac{1}{1785} \cong 0{,}00056.$$

Задача 2.16. Группа из восьми студентов с разными именами рассаживается на скамье, установленной с одной стороны прямоугольного стола. Какова вероятность того, что Маша и Саша окажутся сидящими рядом?

Решение. Обозначим событие, вероятность которого нужно подсчитать, через A. Число всех возможных исходов эксперимента равно числу упорядоченных выборок из восьми элементов по восемь, т. е. числу перестановок из восьми студентов:

$$n = P_8 = 8!.$$

Разобьем подсчет числа m_A благоприятных исходов на несколько простых шагов и воспользуемся принципом умножения. Обозначим белым кружком пару "Маша + Саша", а каждого из оставшихся шести студентов — черным кружком и воспользуемся схемой, приведенной на рис. 2.7. Из рисунка видно, что наша пара может занять место среди шести студентов семью различными способами (действие первое). В самой паре Маша и Саша могут сесть $P_2 = 2! = 2$, т. е. двумя способами (действие второе). Кроме того, для остальных шести студентов есть $P_6 = 6!$ возможностей разместиться за столом при фиксированном положении пары (действие третье).

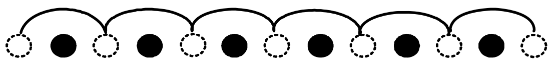

Рис. 2.7

Следовательно, по принципу умножения (1.1) число благоприятных исходов равно произведению этих трех чисел, т. е.

$$m_A = 2 \cdot 6! \cdot 7 .$$

Тогда по формуле классической вероятности (2.2) вероятность события A равна:

$$P(A) = \frac{2 \cdot 6! \cdot 7}{8!} = \frac{2 \cdot 7}{7 \cdot 8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} .$$

Замечание

Задачи 2.17—2.25 предлагается решить самостоятельно.

Задача 2.17. В урне 10 белых шаров и 5 красных. Шары в урне перемешиваются, а затем вынимаются два шара. Какова вероятность, что оба будут красными?

Задача 2.18. Бросаются три игральные кости. Какова вероятность, что сумма выпавших очков будет равна 18? Будет равна 15?

Задача 2.19. В магазин поступили 30 ноутбуков, два из которых — бракованные. Для проверки выбирают три. Найти вероятность того, что: 1) все они окажутся без брака; 2) два будут бракованные; 3) один будет бракованным; 4) хотя бы один будет бракованным.

Задача 2.20. В коллективе из 5 мужчин и 20 женщин выбирают трех человек делегатами на конференцию. Каждый может быть выбран с одинаковой вероятностью. Какова вероятность, что среди отобранных лиц окажутся две женщины?

Задача 2.21. Из множества натуральных чисел $\{1, 2, ..., 10\}$ случайно выбираются два числа. Найти вероятность того, что они оба меньше девяти.

Задача 2.22. В колоде из 36 карт наугад вынимают две карты. Какова вероятность, что одна из них окажется дамой, а другая пиковой масти?

Задача 2.23. Ребенок играет с шестью буквами азбуки: К, А, А, Е, Р, Т. Какова вероятность, что он случайно сложит слово РАКЕТА? Слово РАК?

Задача 2.24. Туристическая группа из пятнадцати человек заселяется в гостиницу, где есть один четырехместный, три трехместных и один двухместный номер. Какова вероятность, что два определенных человека окажутся в двухместном номере?

Задача 2.25. Монета брошена три раза. Найти вероятность появления двух гербов и одной решетки: 1) именно в таком порядке; 2) в любом порядке.

Вероятностная модель случайного эксперимента со счетным числом исходов

Вероятностной моделью эксперимента со счетным числом исходов служит бесконечное вероятностное пространство

$$\begin{pmatrix}\Omega\\ P\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n & \dots\\ P(\omega_1) & P(\omega_2) & \dots & P(\omega_n) & \dots\end{pmatrix},$$

где $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ — исходы эксперимента (элементарные события); $P(\omega_1)$, $P(\omega_2), \dots, P(\omega_n), \dots$ — аксиоматически приписанные исходам вероятности, для которых справедливы:

- ❒ $P(\omega_i)\geq 0,\quad i=1, 2, \dots, n, \dots$ — *аксиома неотрицательности*;
- ❒ $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(\omega_i)=1$ — *аксиома нормированности*, которая в данном случае означает, что числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(\omega_i)$ сходится и сумма его равна единице.

Вероятностью произвольного события $A\in\Im(A\subset\Omega)$ в вероятностной модели со счетным числом исходов называется число, определяемое формулой (2.1). При этом следует иметь в виду, что в этой модели в событие A может входить бесконечное число исходов. В этом случае формула (2.1) означает, что вероятность $P(A)$ есть сумма сходящегося числового ряда.

Замечание 1

В случае эксперимента со счетным числом исходов система $\Im$ всех подмножеств из Ω замкнута относительно счетного числа введенных на ней операций сложения и умножения. Такая система подмножеств $\Im$ называется σ-*алгеброй.*

Замечание 2

Легко убедиться, что определенная (2.1) вероятность $P(A)$ в случае пространства со счетным числом исходов удовлетворяет трем аксиомам:

P1. аксиоме неотрицательности: $P(A)\geq 0\quad \forall A\in\Im$;

P2. аксиоме нормированности: $P(\Omega)=1$;

P3. аксиоме счетной аддитивности: если события $A_i\in\Im$ при $i=1, 2, \dots$ несовместны, то $P\left(\sum\limits_i A_i\right)=\sum\limits_i P(A_i)$.

Задача 2.26. Баскетболист бросает мяч в корзину до первого попадания. Найти вероятность того, что:

1) он попадет при четвертом броске;

2) он попадет в корзину до пятого броска;

3) он попадет в корзину после четвертого броска;

4) он попадет в корзину на четном броске.

Решение. Пространство элементарных событий рассматриваемого эксперимента будет бесконечным, поскольку опыт может продолжаться как угодно долго. Это пространство является счетным, поскольку исходы можно пронумеровать, т. е. $\omega_1 = \text{П}$ — баскетболист попал с первого броска, $\omega_2 = \text{НП}$ — баскетболист попал со второго броска, ..., $\omega_n = \underbrace{\text{НН}\cdots\text{Н}}_{n-1}\text{П}$ — баскетболист попал с n-го броска. Следовательно,

$$\Omega = \{(\text{П});\ (\text{Н, П});\ (\text{Н, Н, П}); ...;\ (\underbrace{\text{Н, Н, ..., Н}}_{n-1}, \text{П});\ ...\}.$$

Поставим в соответствие каждому элементарному событию (исходу) ω_n вероятность $P(\omega_n) = \frac{1}{2^n}$. Тогда вероятностное пространство эксперимента примет вид:

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\text{П}) & (\text{Н, П}) & (\text{Н, Н, П}) & (\text{Н, Н, Н, П}) & ... & (\underbrace{\text{Н, Н, ..., Н}}_{n-1}, \text{П}) & ... \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & ... & \frac{1}{2^n} & ... \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что при этом аксиомы неотрицательности и счетной аддитивности выполнены. Проверим аксиому нормированности:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Построенное вероятностное пространство дает возможность вычислить вероятность всех интересующих нас событий.

1) Событие A — баскетболист попадет при четвертом броске — содержит один исход $A = (\text{Н, Н, Н, П})$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

2) Пусть событие B — баскетболист попадает в корзину до пятого броска. Тогда

$$B = \{(\text{П});\ (\text{Н, П});\ (\text{Н, Н, П});\ (\text{Н, Н, Н, П})\}.$$

Поэтому

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}.$$

3) Если событие C — он попадает в корзину после четвертого броска, то

$$C = \left\{(\text{Н, Н, Н, Н, П});\ (\text{Н, Н, Н, Н, Н, П});\ ...;\ (\underbrace{\text{Н, Н, ..., Н}}_{n-1}, \text{П});\ ...\right\}$$

и поэтому

$$P(C)=\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\cdots=\frac{\frac{1}{32}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{16}.$$

4) Если событие D — он попадает в корзину на четном броске, то

$$D=\{(\text{Н, П});\ (\text{Н, Н, Н, П});\ (\text{Н,Н, Н, Н, Н, П});\ ...\},$$

и поэтому

$$P(D)=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+...=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}.$$

Вероятностная модель случайного эксперимента с несчетным числом исходов

Если случайный эксперимент имеет несчетное количество исходов, то не удается построить вероятностное пространство, приписав вероятности отдельным исходам и через эти вероятности определять вероятность произвольного события.

В этом случае математической моделью эксперимента служит вероятностное пространство $\langle \Omega, \Im, P\rangle$, где:

- ❒ Ω — пространство элементарных событий (исходов);
- ❒ $\Im$ — σ-алгебра подмножеств $A\subset\Omega$, которые мы объявляем событиями, а те подмножества Ω, которые не входят в построенную σ-алгебру, не считаем событиями.

Пусть $P=P(A)$ при $A\in\Im$ — неотрицательная числовая функция, заданная на σ-алгебре $\Im$ и удовлетворяющая следующим трем аксиомам:

P1. аксиоме неотрицательности: $P(A)\ge 0\ \ \forall A\in\Im$;

P2. аксиоме нормированности: $P(\Omega)=1$;

P3. аксиоме счетной аддитивности: если события $A_i\in\Im$ при $i=1, 2, ...$ несовместны, то $P\left(\sum_i A_i\right)=\sum_i P(A_i)$.

В этом случае $P(A)$ называют *вероятностью события* A *(вероятностной мерой).*

Геометрическое определение вероятности

Простейшим примером вероятностной модели с несчетным числом исходов служит так называемая "геометрическая вероятность".

Если Ω — множество конечной длины, площади или объема (т. е. мера множества $\Omega<+\infty$), $\Im$ — σ-алгебра его подмножеств, имеющих соответственно длину, площадь или объем, а случайный эксперимент состоит в "бросании" точки во множество Ω, причем все исходы эксперимента равновозможные, то вероятность попадания в произвольное множество $A \subset \Omega$ ($A \in \Im$) определяется по формуле

$$P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega}. \tag{2.3}$$

Формула (2.3) является *геометрическим определением вероятности.*

Замечание

Легко понять, что геометрическое определение вероятности является обобщением классического на случай несчетного количества исходов эксперимента.

Задача 2.27. На отрезок длины 10 см наудачу ставится точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до концов отрезка больше, чем 1 см.

Решение. Исходы эксперимента — точки $x \in [0;10] \subset R$, поэтому пространство элементарных событий

$$\Omega = \{\, x \mid x \in [0;\, 10] \},$$

а интересующее нас событие A имеет вид:

$$A = \{\, x \mid x \in [1;\, 9] \}.$$

На рис. 2.8 это множество заштриховано.

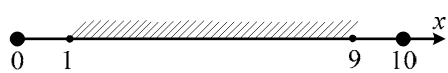

Рис. 2.8

Поскольку множества Ω и A являются отрезками числовой оси, то мерой этих множеств являются их длины. Тогда по формуле (2.3) искомая вероятность равна:

$$P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega} = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

Задача 2.28 (задача о встрече). Страховой агент пригласил для продления договора страхования двух клиентов в офис в промежуток времени между 10 и 11 часами. Найти вероятность того, что ни один из клиентов не будет ждать, пока освободится страховой агент, если для оформления необходимых документов требуется 10 минут.

Решение. Пусть $t_1 = 10 + x$ — время в часах прихода первого клиента, а $t_2 = 10 + y$ — время в часах прихода второго. Ясно, что $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Изобразим точками отрезка $[0;\, 1]$ оси Ox все возможные моменты прихода первого клиента после 10 часов, а точками отрезка $[0;\, 1]$ оси Oy — все возможные моменты прихода после 10 часов второго клиента. Точка $(x;\, y)$ — исход эксперимента — является элементарным событием, состоящим в том, что первый клиент пришел в